Письма в ЖЭТФ, том 43, вып. 7, стр. 342 – 344 *10 апреля 1986 г.*

СТАТИСТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА МЕЗОСКОПИЧЕСКИХ ФЛУКТУАЦИЙ И ТЕОРИЯ ПОДОБИЯ

Б.Л.Альтшулер, В.Е.Кравцов, И.В.Лернер

В рамках ренормгруппового (РГ) анализа нелинейной σ-модели найдена функция распределения мезоскопических флуктуаций кондактанса и плотности состояний и доказана гипотеза эргодичности. Продемонстрировано нарушение однопараметрического скейлинга.

1. Под мезоскопическим понимают такой неупорядоченный проводник, который хотя и велик по сравнению с длиной свободного пробега электрона l, но недостаточно велик для того, чтобы можно было пренебречь отличием его характеристик от их средних по реализациям случайного потенциала (RP) [1-3]. В [4, 5] было показано, что средний квадрат мезоскопической флуктуации $\delta G = G - \langle G \rangle$ полной остаточной проводимости (кондактанса) любого образца равен по порядку величины

$$\langle \delta G^2 \rangle \sim (e^2/\hbar)^2 , \tag{1}$$

где $\langle ... \rangle$ – усреднение по реализациям RP. Этот результат был получен в низшем порядке теории возмущений по $g^{-1} \equiv e^2(\pi^2 \hbar \langle G \rangle)^{-1} \ll 1$.

Известно, что при вычислении $\langle G \rangle$ в двумерных системах с ростом размера образца L существенными становятся поправки $\sim g^{-1} \ln(L/l)$, возникающие в следующих порядках. Важно понять, как суммирование таких поправок меняет величину $\langle \delta G^2 \rangle$. В частности, возникает вопрос, можно ли описывать мезоскопику в рамках однопараметрического скейлинга [6].

Экспериментально [1], мезоскопические флуктуации должны проявляться в виде воспроизводимых апериодических осцилляций G в зависимости от таких параметров, как, например, магнитное поле H, энергия Ферми ϵ_F и т. п. [3, 5, 7]. В [5] была выдвинута гипотеза эргодичности, состоящая в том, что усреднение по RP эквивалентно усреднению по H или по ϵ_F. Для ее проверки необходим анализ высших корреляционных моментов. Такой анализ позволяет также понять характер функции распределения флуктуаций. Настоящая работа посвящена исследованию высоких порядков теории возмущений, которое дает ответ на все эти вопросы.

2. Регулярным способом построения теории возмущений служит подход, основанный на нелинейной σ-модели (см. работу [8] и ссылки в ней). Вычисления, которые будут опубликованы позднее, приводят к следующему выражению для коррелятора $K_{n,m} = \langle \nu^n G^m \rangle$ плотности состояний ν и кондактанса G в кубе размерности d ($\hbar = 1$):

$$K_{n,m} = \left(\frac{\nu}{N}\right)^n \left(\frac{e}{4\pi N}\right)^{2m} \prod_{k \leq n < j \leq n+m} \left(\frac{\partial}{\partial \omega_k}\right)\left(\mathrm{Sp}\frac{\partial^2}{\partial \mathbf{h}_j^2}\right) \int \frac{\mathcal{D}Q}{Z} e^{-F[\omega;\mathbf{h}]} \Bigg|_{(N,\omega,\mathbf{h})=0} . \tag{2}$$

Здесь $Z = \int \mathcal{D}Q \exp(-F[0;0])$, а производящий функционал $F[\omega;\mathbf{h}]$ при $L/l \to \infty$ равен

$$F[\omega;\mathbf{h}] = \int \mathrm{Sp}\left\{\frac{\pi\nu D}{8}(\nabla Q)^2 - \frac{1}{4L^d}\omega\Lambda Q + \frac{g}{8L^d}[\mathbf{h}, Q]^2\right\} d^d r, \tag{3}$$

где D – коэффициент диффузии. Поле $Q(\mathbf{r})$ имеет структуру

$$Q = \tau_\mu Q^\mu_{\alpha\beta;ab;kj}; \quad (Q^\mu)^* = Q^\mu; \quad \mu = 0, 1, 2, 3 \tag{4}$$

$$Q^2 = 1; \quad Q = Q^+; \quad \mathrm{Sp}\, Q = 0. \tag{5}$$

В (4) τ_μ – кватернионы: $\tau_0 = 1$; $\tau_{1,2,3} = i\sigma_{x,y,z}$ (σ – матрицы Паули). Репличные индексы α, β пробегают значения от 1 до N (в окончательных результатах $N = 0$); происхождение индексов a и b, принимающих по два значения, связано с наличием опережающей и запаздывающей функций Грина электрона в исходных выражениях. Нам пришлось ввести

дополнительные, по сравнению с [8], индексы k, j для того, чтобы различать функции Грина, относящиеся к разным ν и G в корреляторе $K_{n,m}$. Источники $\omega\Lambda$ и $\mathbf{h}$, не зависящие от $\mathbf{r}$, а также имеют структуру (4). При этом $(\omega\Lambda) = \omega_k \tau_0 \delta_{\alpha\beta} (\sigma_z)_{ab} \delta_{kj}$; $\mathbf{h} = -\mathbf{h}^+$, $\mathbf{h}^1 = \mathbf{h}^2 = 0$, а $\mathbf{h}^0$ и $\mathbf{h}^3$ – матрицы, диагональные по индексам k, j и антидиагональные по a, b (векторные индексы $\mathbf{h}$ в (2) опущены).

При вычислении $K_{n,m}$ в низшем порядке возникают интегралы типа J_4, где $J_s = \int d^d q/q^s$, что и приводит, в частности, к результату (1), как и к соответствующему результату для $\langle \nu^2 \rangle$ [9]. При учете следующих порядков $K_{n,m}$ выражается через сумму по p членов типа $(J_4)^{n+m-1}(J_2)^p$, а вклады, содержащие J_s с $s \geqslant 6$, сокращаются. Суммирование рядов по J_2 эквивалентно, как известно, перенормировке зарядов в функционале (3).

3. Функционал (3) содержит три вершины, однако при $N = 0$ он зависит только от одного РГ заряда g (безразмерного кондактанса). Дело в том, что отношение зарядов при первой и третьей вершинах не меняется при РГ преобразованиях в силу соотношения Эйнштейна $g \propto \nu D L^{d-2}$. Коэффициент при $\omega\Lambda Q$ также не перенормируется из-за закона сохранения числа частиц [8]. Следовательно, в выражениях для $K_{n,m}$, полученных в первом неисчезающем порядке теории возмущений, необходимо заменить затравочный заряд g_0 на перенормированный $g\,(g = g_0 - \ln(L/l)$ при $d = 2)$.

Поскольку в формулу (1) для $K_{0,2}$ (как и в $K_{1,0} = \nu$) в низшем порядке заряд не входит, она остается справедливой во всех порядках теории возмущений. Остальные корреляторы существенно зависят от g, т. е. от L.

4. При $g \gg 1$ статистика флуктуаций G и ν близка к гауссовой. Именно, можно показать, что кумулянт $K^c_{n,m}$ получающийся из (2), (3) при учете только связных диаграмм, мал при $n + m > 2$:

$$K^c_{n,m} (K^c_{0,2})^{-m/2} (K^c_{2,0})^{-n/2} \sim g^{-(n+m-2)} \ll 1. \tag{6}$$

Из (6) видно, что при $g \sim 1$, т. е. вблизи андерсоновского перехода, функция распределения мезоскопических флуктуаций резко негауссова.

5. Асимптотика функции распределения оказывается негауссовой при любых g. Дело в том, что для вычисления $K^c_{n,m}$ при $n + m \gtrsim g_0$ необходимо учитывать дополнительные к (3) вершины в $F[\omega; \mathbf{h}]$, пропорциональные высоким степеням ω и $\mathbf{h}$, так как заряды при этих вершинах, хотя и имеют затравочную малость $\sim (l/L)^{2s}$, но быстро растут при РГ преобразованиях. Например, заряд $\Gamma_{0,s}$ при вершине $\mathrm{Sp}[\mathbf{h}, Q]^{2s}$, а, значит, и $K^c_{0,s}$ пропорциональны

$$K^c_{0,s} \propto \Gamma_{0,s} \propto \left(\frac{l}{L}\right)^{2s} \left(\frac{g_0}{g}\right)^{2s^2} \underset{g \gg 1}{\rightarrow} \left(\frac{l}{L}\right)^{2s(1 - s g_0^{-1})}. \tag{7}$$

Аналогичный закон роста, впервые установленный в [10], справедлив и для зарядов при вершинах $\mathrm{Sp}\,(\omega\Lambda Q)^s$. В явной зависимости (7) от g_0 проявляется отсутствие однопараметрического скейлинга.

Из (7) можно восстановить асимптотику функции распределения $f(\hbar\delta G/e^2)$ при сравнительно больших δG:

$$f(x) \propto \exp\{-A \ln^2(xL^2/l^2)\}; \quad A^{-1} = 8\ln(g_0/g) \rightarrow 8 g_0^{-1} \ln(L/l). \tag{8}$$

Асимптотика функции распределения флуктуаций плотности состояний $f(\delta\nu g/\nu)$ также имеет вид (8). Распределение (8) справедливо при $\delta G \gtrsim (Ge^2/\hbar)^{1/2}$. При $d = 1$ в области $g \gg 1$ распределение (8) совпадает с найденным ранее точным распределением [11].

6. Согласно гипотезе эргодичности $\overline{G^n} = \langle G^n \rangle$, где черта означает усреднение по ϵ_F. Для проверки гипотезы достаточно показать, что величина $\langle [\langle G^n \rangle - \overline{G^n}]^2 \rangle$, равная

$$\frac{1}{(2E)^2} \int_{\epsilon - E}^{\epsilon + E} d\epsilon_1 d\epsilon_2 \{\langle G^n(\epsilon_1) G^n(\epsilon_2) \rangle - \langle G^n(\epsilon_1) \rangle \langle G^n(\epsilon_2) \rangle\} \tag{9}$$

стремится к нулю с увеличением E. Для рассмотрения корреляторов типа $\langle \prod_j G(\epsilon_j) \rangle$ следует добавить в (3) вершину, пропорциональную $\mathrm{Sp}MQ$, где M – матрица со структурой (4): $M = \tau_0 \delta_{\alpha\beta} \delta_{ab} \delta_{kj} \epsilon_j$. Вычисления по формулам (2), (3) с учетом этой вершины показывают, что подынтегральное выражение в (9) убывает по крайней мере как $[|\epsilon_1 - \epsilon_2| L^2/D]^{d-4}$, что и доказывает эргодичность. Аналогично ее можно доказать относительно усреднения по магнитному полю H.

Авторы глубоко благодарны Д.Е.Хмельницкому и Б.И.Шкловскому за ценные обсуждения.

Литература

1. *Webb R.A., Washburn S., Umbach C.P., Laibowits R.B.* Phys. Rev. Lett., 1985, **54,** 485.
2. *Landauer R. In* "Localization, Interaction and Transport Phenomena", Springer Ser. in Sol. St. Phys., 1984, **61,** p. 38; *M.Ya.Azbel* Ibid, p. 162.
3. *Stone A.D.* Phys. Rev. Lett., 1985, **54,** 2692.
4. *Альтшулер Б.Л.* Письма в ЖЭТФ, 1985, **41,** 520.
5. *Lee P.A., Stone A.D.* Phys. Rev. Lett., 1985, **55,** 1622.
6. *Abrahams E., Anderson P.W., Licciardello D.C., Ramakrishnan T.V.* Phys. Rev. Lett., 1979, **42,** 673.
7. *Альтшулер Б.Л., Хмельницкий Д.Е.* Письма в ЖЭТФ, 1985, **42,** 291.
8. *Ефетов К.Б., Ларкин А.И., Хмельницкий Д.Е.* ЖЭТФ, 1980, **79,** 1120.
9. *Альтшулер Б.Л., Шкловский Б.И.* ЖЭТФ, 1986, **90,** вып. 6.
10. *Кравцов В.Е., Лернер И.В.* ЖЭТФ, 1985, **88,** 1281.
11. *Мельников В.И.* ФТТ, 1981, **23,** 782.

Институт ядерной физики им. Б.П.Константинова
Академии наук СССР

Институт спектроскопии
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
20 февраля 1986 г.