Письма в ЖЭТФ, том 43, вып. 9, стр. 414 – 417 *10 мая 1986 г.*

О ДЛИННОВОЛНОВОМ ПРЕДЕЛЕ В НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ ПОПЕРЕЧНЫХ МОДУЛЯЦИЙ СОЛИТОНОВ

С.К.Жданов

Для различных типов волновых уравнений исследованы методом Уизема [1] длинноволновые неустойчивые изгибы солитонов. Задача сведена к "газоподобным" уравнениям, представляющим новые разновидности "квази-чаплыгинских" сред [2].

1. Упрощенный "длинноволновый" вариант нелинейной эволюции поперечных модуляций солитонов интересен прежде всего тем, что набор точно интегрируемых случаев [3] ограничен, а число не менее важных, но "неинтегрируемых" ситуаций продолжает возрастать [4-7].

---

1) Мы предполагаем, что известное феноменологическое соотношение $|\psi_V(0)|^2 / M_V^2 = \mathrm{const}$ справедливо также в случае топония $T = (t\bar{t})$.

В этом пределе оптимальным представляется метод Уизема [1], которому мы и будем следовать. Он позволяет продвинуться несколько дальше, чем это возможно в линейной теории возмущений [6,7]. Кроме того, линеаризация уравнений модуляций-альтернативный, а зачастую и более простой метод исследования линейной стадии. Поскольку основные моменты метода общеизвестны [1], здесь нет нужды подробно на них останавливаться – далее будут перечислены несколько примеров, поясняющих суть дела. В основном рассматриваются "классические" солитоны, описываемые уравнениями Кортевега – де Вриза (КдВ), Кадомцева – Петвиашвили (КП), НУШ-уравнением и СГ-уравнением. Теория одномерных модуляций развита в работах [8].

2. В качестве первого примера опишем в рамках изотропной [4,7] модели КП (с положительной дисперсией, $l^2 > 0$)

$$(u_t + uu_x - c_0 l^2 u_{xxx})_x = -\frac{c_0}{2}\Delta_\perp u;\ \Delta_\perp u \equiv u_{yy} + u_{zz} \tag{1}$$

поперечную модуляцию однопараметрической (с фиксированной длиной волны λ) кноидальной волны КдВ [5] ($K(m)$, $E(m)$ – эллиптические интегралы, m – параметр):

$$\begin{gathered} u = u_1(x,t) = -A(cn^2(\varphi, m) - \langle cn^2 \rangle);\ \varphi = pl^{-1}(x + ct);\ p = 2K(m)l/\lambda, \\ c = 4c_0p^2(2m-1) - A\langle cn^2 \rangle;\ \langle cn^2 \rangle = (E/K - 1 + m)/m;\ A = 12mc_0p^2. \end{gathered} \tag{2}$$

Уравнению (1) соответствует функция Лагранжа (здесь и далее c_0 – скорость звука)

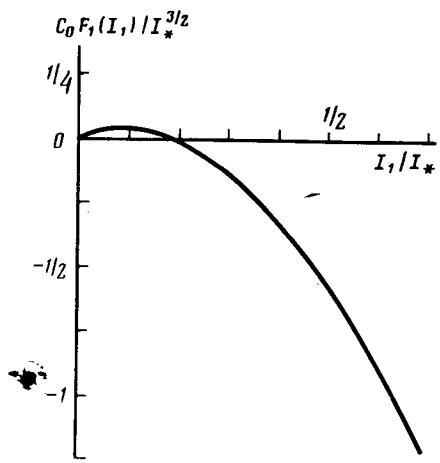
$$\mathcal{L}_1 = u\Phi_t + \frac{1}{3}u^3 + c_0 l^2 u_x^2 + \frac{1}{2}c_0(\nabla_\perp \Phi)^2, \qquad u \equiv \Phi_x. \tag{3}$$

Проинтегрируем $\mathcal{L}_1$ по периоду λ с "пробной" функцией вида (2), но с измененной фазой $\varphi = pl^{-1}(x + x_0(t, \mathbf{r}_\perp))$, это дает

$$\begin{gathered} L_1 = \langle \mathcal{L}_1 \rangle \equiv \int_0^\lambda \frac{dx}{\lambda}\mathcal{L}_1 = [x_{0t} + \frac{c_0}{2}(\nabla_\perp x_0)^2]I_1 + c_0F_1(I_1); \\ I_1 = \langle u_1^2 \rangle;\ F_1(I_1) = \langle \frac{u_1^3}{3c_0} + l^2u_{1x}^2 \rangle. \end{gathered} \tag{4}$$

С помощью (4), варьируя функции I_1 и x_0, выводим "газоподобные" уравнения двумерных модуляций ($\mathbf{V} = c_0\nabla_\perp x_0$, $F_1(I_1)$ – см. рисунок):

$$\frac{\partial}{\partial t}I_1 + \mathrm{div}(I_1\mathbf{V}) = 0;\quad \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{V} + (\mathbf{V}\nabla)\mathbf{V} = -c_0^2F_1''(I_1)\nabla I_1. \tag{5}$$



Функция $F_1(I_1)$ для кноидальной волны. Обозначено: $I_* = (12c_0l^2k_0^2)^2$, $k_0 = 2\pi/\lambda$

В солитонном пределе $m \to 1$ получаем из (2), (4) $F_1(I_1) \approx -|\mathrm{const}|I_1^{5/3}$. Это соответствует "одноатомному газу" с $\gamma = 5/3$, но с отрицательной сжимаемостью [2]. При $m \to 0$ $(I_1 \to 0)$ имеем $F_1'' \approx -(12c_0^2 l^2 k_0^2)^{-1} = \mathrm{const}$, $k_0 = 2\pi/\lambda$, что отличается от полученного в [5], но точно совпадает с результатом прямого разложения стоксова типа [1] по малой амплитуде.

3. Как известно, двумерный рациональный солитон КП [9]

$$u = u_2(x, y, t) = -12c_0 l^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \ln\left[1 + \left(\frac{x + ct}{\Delta_1}\right)^2 + \left(\frac{y}{\Delta_2}\right)^2\right]; \quad \Delta_2^2 = \frac{3l^2 c_0^2}{2c^2}; \quad \Delta_1^2 = 6^{1/2}\Delta_2 l \tag{6}$$

в модели (2) неустойчив [4]. Опишем нарастание его изгибов на нелинейной стадии. Интегрируя $\mathcal{L}_1$ из (3) с "пробной" функцией $u_2(x + x_0(z, t), y, t)$ по переменным x, y получим

$$L_2 = \overline{\mathcal{L}_1} \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} dxdy\, \mathcal{L}_1 = [x_{0t} + \frac{c_0}{2} x_{0z}^2]I_2 + c_0 F_2(I_2); \quad I_2 = \overline{u_2^2}; \tag{7}$$

$$F_2(I_2) = \overline{u_2^3}/3c_0 + l^2\overline{u_{2x}^2} + \overline{\Phi_{2y}^2}/2 = -3I_2^3/2\pi^2(12c_0 l)^4,$$

что, очевидно, приводит к уравнениям модуляций вида (5). Удобно обозначить $\rho = (c/c_{\text{нач}})^{1/2} \sim I_2$ ($c_{\text{нач}}$ – скорость немодулированной волны), и ввести $V = c_0 x_{0z}$, тогда окончательно получаем

$$\rho_t + (\rho V)_z = 0; \quad V_t + VV_z = c_{\text{эфф}}^2 \rho\rho_z; \quad c_{\text{эфф}}^2 = 2c_0 c_{\text{нач}} \tag{8}$$

– одномерный "газ" $(\gamma = 3)$ с отрицательной сжимаемостью. На линейной стадии имеем апериодический рост с инкрементом $\omega^2 = -k_z^2 c_{\text{эфф}}^2$, с точностью до переобозначений совпадающий с найденным в [4].

4. Сходный результат получается и для поперечной модуляции солитона НУШ, устойчивого для одномерных возмущений [10]. Для НУШ в безразмерной форме

$$i\psi_t + \frac{1}{2}\Delta\psi + \psi|\psi|^2 = 0 \tag{9}$$

функция Лагранжа $\mathcal{L}_2$ и солитон ψ_0 равны

$$2\mathcal{L}_2 = i(\psi\psi_t^* - \psi^*\psi_t) + \nabla\psi\nabla\psi^* - |\psi|^4; \quad \psi_0 = A_0 e^{i\varphi}; \quad A_0 = \frac{a}{\mathrm{ch}\, ax}; \quad \varphi = \frac{a^2}{2}t. \tag{10}$$

Усредняя $\mathcal{L}_2$ с "пробной" функцией $\psi = A_0(x)\exp[i\varphi(t, \mathbf{r}_\perp)]$, получим (ср. (4))

$$L_3 = \overline{\overline{\mathcal{L}}}_2 \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, \mathcal{L}_2 = [\varphi_t + \frac{1}{2}(\nabla_\perp\varphi)^2]I_3 + F_3(I_3); \quad I_3 = \overline{\overline{A_0^2}}; \quad F_3(I_3) = \frac{1}{2}[\overline{\overline{A_{0x}^2}} - \overline{\overline{A_0^4}}], \tag{11}$$

и уравнения модуляций типа (5). Поскольку $I_3 = 2a$, $F_3 = -a^3/3$, то их окончательный вид [11, 12]

$$a_t + \mathrm{div}\, a\mathbf{V} = 0; \quad \mathbf{V}_t + (\mathbf{V}\nabla)\mathbf{V} = a\nabla a; \quad \mathbf{V} \equiv \nabla_\perp\varphi. \tag{12}$$

5. 2π – кинк [1] СГ-уравнения $\Delta\varphi - \varphi_{tt} = \sigma\sin\varphi$, с лагранжианом $2\mathcal{L}_3 = \varphi_t^2 - (\nabla\varphi)^2 - 4\sigma\sin^2(\varphi/2)$, определяется формулой

$$\varphi = \varphi_0(x + ct, \Delta) = 4\,\mathrm{arctg}(\exp\xi); \quad \xi = (x + ct)/\Delta; \quad c^2 = 1 - \sigma\Delta^2. \tag{13}$$

Усреднив $\mathcal{L}_3$ с "пробной" функцией $\varphi = \varphi_0(x + x_0(t, \mathbf{r}_\perp), \Delta(t, \mathbf{r}_\perp))$; $|\Delta_{t, \mathbf{r}_\perp}| \ll |x_{0t, \mathbf{r}_\perp}|$, получим $\overline{\overline{\mathcal{L}}}_3 = \frac{4}{\Delta}[x_{0t}^2 - (\nabla_\perp x_0)^2 - 1 - \sigma\Delta^2]$, что дает для модуляций кинка уравнения вида (обозначено $\rho = x_{0t}/\Delta$; $\mathbf{V} = -\nabla_\perp x_0/x_{0t}$):

$$\rho_t + \mathrm{div}\,\rho\mathbf{V} = 0; \quad (\gamma\mathbf{V})_t + \nabla_\perp\gamma = 0; \quad \gamma = (1 - V^2 + \sigma\rho^{-2})^{-1/2}. \tag{14}$$

В пределе $V \ll 1, \rho \gg 1$ (14) сводится к динамике "газа" Чаплыгина [2], неустойчивого при $\sigma = -1$.

6. В качестве примера с анизотропной дисперсией рассмотрим солитон (6) "косой" магнитозвуковой волны [5,6]. В обозначениях [6] эта волна подчиняется уравнению

$$\left[\frac{2}{c_A}\varphi_t + \left[q\varphi^2 - \epsilon\varphi - \frac{c^2}{\omega_{pe}^2}(\sigma^2-1)\varphi_{\eta\eta} - \frac{c^2}{\omega_{pi}^2}(2\alpha\varphi_{\eta z} + \varphi_{zz})\right]_\eta\right]_\eta = -\Delta_{x,z}\varphi, \tag{15}$$

где α – тангенс угла наклона, $\sigma^2 = (\alpha\omega_{pe}/\omega_{pi})^2$, остальные обозначения разъяснены в [6]. После очевидных переобозначений (15) приведется к форме, близкой к (2):

$$[u_t + uu_x - c_0 l^2 u_{xxx} - c_0 l_1^2(2\alpha u_{zxx} + u_{xzz})]_x = -\frac{1}{2}c_0\Delta_\perp u, \tag{16}$$

где $l_1^2 = c^2/2\omega_{pi}^2$; $l^2 = (\sigma^2-1)c^2/2\omega_{pe}^2 > 0$ – с тем, чтобы (6) было несингулярным решением (16). Функция Лагранжа $\mathcal{L}_{\text{АН}}$ для (16) обобщает (3) и равна

$$\mathcal{L}_{\text{АН}} = \mathcal{L}_1 + \delta\mathcal{L}\ ;\ \delta\mathcal{L} = c_0 l_1^2[u_z^2 - 2\alpha\Phi_z u_{xx}]. \tag{17}$$

При выборе пробной функции учтем, что наклону солитона (6) в рамках уравнения (16) соответствуют замены (здесь $\kappa = x_{0z} = \text{const}$):

$$x \to x + \kappa z;\ c \to c + \frac{1}{2}c_0\kappa^2;\ l^2 \to l^2[1 + \kappa(\kappa + 2\alpha)l_1^2/l^2], \tag{18}$$

так что, в отличие от изотропного случая, когда $l_1 \equiv 0$, теперь при изгибе меняется и длина l. Учтя это обстоятельство, найдем $\overline{\mathcal{L}}_{\text{АН}}$ и затем нелинейные уравнения модуляций ($\rho \equiv \equiv (c/c_{\text{нач}})^{1/2}$, $V \equiv c_0 x_{0z}$):

$$\begin{gathered}(\rho q)_t + [\rho q V + \frac{1}{3}c_{\text{эфф}}^2\rho^3 q']_z = 0;\ V_t + VV_z = c_{\text{эфф}}^2\rho\rho_z;\\ q = q(V) = 1 + (V^2 + 2\alpha c_0 V)l_1^2/c_0^2 l^2;\ q' \equiv dq/dV.\end{gathered} \tag{19}$$

Спектр малых колебаний для них ($V \approx 0$, $\tilde{c} = c - c_{\text{нач}} \approx 0$) сводится к полученному в [6].

В заключение подчеркнем, что динамика модуляций солитонов КдВ, КП, НУШ и СГ, как это ясно из выше изложенного, укладывается в рамки общей теории "квази-чаплыгинских" неустойчивых сред [2]. Это позволяет найти ряд точных решений, которые, за краткостью статьи, здесь не приводим.

Автор выражает искреннюю признательность Б.А.Трубникову за внимание к работе и обсуждение результатов, а также А.Б.Михайловскому, В.И.Петвиашвили и А.И.Смолякову за критические замечания по статье.

Литература

1. *Уизем Дж.* Линейные и нелинейные волны., М.: Мир, 1977, 466.
2. *Трубников Б.А., Жданов С.К.* Физика плазмы, 1986, **12**, № 6; *Жданов С.К., Трубников Б.А.* Письма в ЖЭТФ, 1986, **43**, 178.
3. *Захаров В.Е., Манаков С.В., Новиков С.П., Питаевский Л.А.* Теория солитонов. Метод обратной задачи., М.: Наука, 1980.
4. *Кузнецов Е.А., Турицын С.К.* ЖЭТФ, 1982, **82**, 1457.
5. *Манин Д.Ю., Петвиашвили В.И.* Письма в ЖЭТФ, 1983, **38**, 437.
6. *Михайловский А.Б., Абурджания Г.Д., Онищенко О.Г., Смоляков А.И.* ЖЭТФ, 1985, **89**, 482.
7. *Михайловский А.Б., Макурин С.В., Смоляков А.И.* ЖЭТФ, 1985, **89**, 1603.
8. *Дубровин Б.А., Новиков С.П.* ДАН СССР, 1983, **270**, 781; *Царев С.П.*, ДАН СССР, 1985, **282**, 534.
9. *Петвиашвили В.И.* Кн. Нелинейные волны, М.: Наука, 1979, 5; *Bordag L.A., Its A.R., Matveev A.V. et al.* Phys. Lett., 1979, **63A**, 205.
10. *Захаров В.Е.* Кн. Основы физики плазмы. М., Энергоатомиздат, 1984, т. 2, с. 79; *Шапиро В.Д., Шевченко В.И.* Там же, с. 119.
11. *Makhankov V.G.* Physics Reports, 1978, **35**, 59.
12. *Дегтярев Л.М., Захаров В.Е., Рудаков Л.И.* ЖЭТФ, 1975, **68**, 115.

Московский
инженерно-физический институт

Поступила в редакцию
27 февраля 1986 г.