Письма в ЖЭТФ, том 43, вып. 9, стр. 428 – 431 *10 мая 1986 г.*

КИРАЛЬНАЯ АНОМАЛИЯ И ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ ИМПУЛЬСА В ^{3}He-A.

Г.Е.Воловик

Несохранение импульса фермионного вакуума в сверхтекучем ^{3}He-A при $T = 0$ является следствием киральной аномалии, которая полностью аналогична аномалии для аксиального тока в квантовой электродинамике. Эффективные "электромагнитные" поля, роль которых в ^{3}He-A играют градиенты параметра порядка, создают источник импульса вида $F_{\mu\nu}\overset{*}{F}{}^{\mu\nu}$. Этот швингеровский источник описывает обмен импульсом между фермионным вакуумом и системой возбуждений.

Ток в сверхтекучем ^{3}He-A при $T = 0$ (вакуумный ток) содержит помимо обычного сверхтекучего тока $\rho \mathbf{v}_s$ также и орбитальные токи, возникающие вследствие того, что куперовские пары обладают орбитальным моментом $\hbar$, направленным вдоль общей оси квантования $\mathbf{l}(\mathbf{l}^2 = 1)$:

$$\mathbf{j} = \rho \mathbf{v}_S + \frac{1}{2}\mathrm{rot}\left(\frac{1}{2}\rho\hbar\mathbf{l}\right) - \frac{1}{2}C_0\mathbf{l}\,(\mathbf{l}\cdot\mathrm{rot}\,\mathbf{l}). \tag{1}$$

Последний член в токе с C_0, приближенно совпадающим с плотностью частиц ρ, является аномальным в том смысле, что из-за него любые попытки построения замкнутой феноменологической системы уравнений движения для переменных ρ, $\mathbf{v}_S$, $\mathbf{l}$ при $T = 0$ приводили к невыполнению закона сохранения импульса $\mathbf{j}$ [1]. А именно: в уравнении для тока (1) возникает источник $\mathbf{I}$:

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{j} + \nabla_i \vec{\pi}_i = \mathbf{I}, \tag{2}$$

который в основном приближении имеет вид

$$\mathbf{I} = -\frac{1}{2}\mathbf{l}(\mathbf{l}\cdot\mathrm{rot}\,\mathbf{l})\frac{\partial}{\partial t}C_0 - \frac{3}{2}C_0\mathbf{l}\left(\mathrm{rot}\,\mathbf{l}\cdot\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{l}\right) + \ldots . \tag{3}$$

Поэтому возникает дилемма: либо принять, что $C_0 = 0$, т. е. микроскопические теории, приводящие к $C_0 \cong \rho$, неверны, либо признать, что в ^{3}He-A даже при $T = 0$ должны существовать надвакуумные возбуждения, образующие нормальную компоненту, которая должна брать на себя дефицит импульса. Т. е. для импульса квазичастиц $\mathbf{P}$ должно выполняться уравнение

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{P} + \nabla_i \tilde{\vec{\pi}}_i = -\mathbf{I}, \tag{4}$$

чтобы полный ток $\mathbf{j} + \mathbf{P}$ сохранялся.

Как выяснилось, осуществляется вторая версия. А именно, с одной стороны в работах [2, 3] было показано, что существование аномального тока с $C_0 \cong \rho$ является следствием киральной аномалии, аналогичной той аномалии, которая имеет место в квантовой электродинамике. Аналогия связана с тем, что ферми-частицы в ^{3}He-A описываются уравнением Дирака, причем роль калибровочного поля в ^{3}He-A играет текстура вектора $\mathbf{l}$ [4]. С другой стороны уравнение (4) с $\mathbf{I}$, даваемым (3), было получено Комбеско и Домбром [4], исходя из динамики квазичастиц в низкочастотном гидродинамическом пределе ($\omega\tau \ll 1$). Однако этот низкочастотный режим реально не осуществляется в ^{3}He-A при $T = 0$ [4].

Здесь будет показано, что уравнение (4) справедливо и в общем случае и есть не что иное, как модификация применительно к ^{3}He-A уравнения Швингера для аксиального тока в квантовой электродинамике [5]:

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho_5 + \vec{\nabla}\mathbf{J}_5 = \frac{e^2}{2\pi^2}\mathbf{E}\cdot\mathbf{B}, \tag{5}$$

где $\rho_5, \mathbf{J}_5$ — компоненты аксиального тока $\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma_5\psi$, а $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$ в правом члене, описывающем аномальный источник аксиального тока, это соответственно электрическое и магнитное поля.

В ^{3}He-A киральная аномалия связана с существованием двух точек на полюсах ферми-поверхности, где энергия квазичастиц

$$E_{\mathbf{k}} = \left(\left(\frac{k^2}{2m} - \epsilon_F\right)^2 + \Delta_0^2\,[\mathbf{k},\mathbf{l}\,]^2 / k_F^2\right)^{1/2}, \qquad \epsilon_F = \frac{k_F^2}{2m}$$

обращается в нуль: это $\mathbf{k} = \pm k_F\mathbf{l}$. При низких температурах T по сравнению с амплитудой щели Δ_0 основную роль в динамике и термодинамике жидкости играют возбуждения с импульсами вблизи полюсов. Причем уравнение Боголюбова для квазичастиц вблизи полюсов сводится к анизотропным уравнениям Вейля для безмассовых заряженных фермионов [3]:

$$\left[\left(i\frac{\partial}{\partial t} - eA_0\right) - c_{ij}\sigma_i\left(\frac{1}{i}\nabla_j - eA_j\right)\right]\xi = 0,$$
$$\left[\left(i\frac{\partial}{\partial t} - eA_0\right) + c_{ij}\sigma_i\left(\frac{1}{i}\nabla_j - eA_j\right)\right]\eta = 0. \tag{6}$$

Здесь "скорость света" является анизотропным тензором: $c_{ij} = \frac{k_F}{m}\hat{z}_i\hat{z}_j + \frac{\Delta_0}{k_F}(\delta_{ij} - \hat{z}_i\hat{z}_j)$, ось z направлена вдоль $\mathbf{l}$; заряд $e = \mathbf{k}\cdot\mathbf{l}/k_F$ равен $+1$ или -1 в зависимости от того, вблизи какого полюса находится возбуждение; ξ и η — боголюбовские спиноры, описывающие квазичастицы соответственно с $e = -1$ (правые "электроны") и с $e = +1$ (левые "позитроны"); $\vec{\sigma}$ — матрицы Паули; калибровочные поля следующим образом выражаются через $\mathbf{l}$ и $\mathbf{v}_S$:

$$\mathbf{A} = k_F\mathbf{l}, \quad A_0 = k_F\mathbf{l}\cdot\mathbf{v}_S, \quad \mathbf{B} = \mathrm{rot}\mathbf{A}, \quad \mathbf{E} = -\vec{\nabla}A_0 - \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{A}. \tag{7}$$

Формальная аналогия уравнений (6) с уравнением Дирака (анизотропия скорости света может быть устранена растяжением вдоль оси z) позволяет воспользоваться уравнением Швингера (5) для аксиального тока, который выражается через ξ и η стандартным образом:

$$\rho_5 = \langle \xi^+ \xi \rangle - \langle \eta^+ \eta \rangle, \qquad J_{5i} = c_{ij}(\langle \xi^+ \sigma_j \xi \rangle + \langle \eta^+ \sigma_j \eta \rangle). \tag{8}$$

Поскольку $\langle \xi^+ \xi \rangle$ это число правых квазичастиц с импульсами $-k_F\mathbf{l}$, а $\langle \eta^+ \eta \rangle$ – число левых квазичастиц с импульсами $k_F\mathbf{l}$, то величина $\mathbf{P} = -\rho_5 k_F \mathbf{l}$ является плотностью импульса возбуждений. Поэтому из уравнения (5) следует, что из-за конверсии левых частиц в правые (путем "прокачки" ферми-моря через "отверстия" в полюсах на ферми-поверхности) импульс возбуждений $\mathbf{P}$ не сохраняется: возникает конверсия импульса вакуума $\mathbf{j}$ в импульс возбуждений $\mathbf{P}$.

Найдем источник импульса, т. е. скорость передачи импульса из вакуума. Для этого умножим обе части уравнения (5) на $-k_F\mathbf{l}$. Тогда, пренебрегая высшими градиентами параметра порядка и учитывая, что $\rho = k_F^3 / 3\pi^2$ получаем уравнение (4) в виде

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{P} - \nabla_i(J_{5i} k_F \mathbf{l}) = -\mathbf{I}, \tag{9}$$

где

$$\mathbf{I} = \frac{k_F \mathbf{l}}{2\pi^2}(\mathbf{E}\cdot\mathbf{B}) = -\frac{1}{2}\mathbf{l}(\mathbf{l}\cdot\mathrm{rot}\,\mathbf{l})\frac{\partial}{\partial t}\rho - \frac{3}{2}\rho\mathbf{l}\left(\mathrm{rot}\,\mathbf{l}\cdot\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{l}\right) - \frac{1}{2}\mathbf{l}\left(\vec{\nabla}\rho\cdot\left[\mathbf{l},\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{l}\right]\right) + \ldots \tag{10}$$

Выражение (10) совпадает с выражением (3) для источника вакуумного тока (1), полученным из феноменологических уравнений гидродинамики, описывающих движение фермионного вакуума. Это доказывает как правильность феноменологических уравнений, так и существование аномального члена с $C_0 = \rho$ в токе (1).

Таким образом при построении замкнутых уравнений динамики для ^{3}He-A даже при $T = 0$ нужно учитывать динамику возбуждений. При низких частотах $(\omega\tau \ll 1)$, т. е. в гидродинамическом режиме для возбуждений, ^{3}He-A при $T = 0$ описывается дополнительной к вакуумным переменным $\rho, \mathbf{v}_S$ и $\mathbf{l}$ переменной $\mathbf{v}_n$ – скоростью нормальной компоненты, причем $\mathbf{P} = \overleftrightarrow{\rho}_n(\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_S)$. Плотность нормальной компоненты $\overleftrightarrow{\rho}_n$ отлична от нуля даже при $T = 0$ благодаря ненулевой плотности состояний вблизи полюсов ферми-поверхности, которая возникает в текстуре из-за наличия "магнитного" поля $\mathbf{B}$ (см. [4, 1, 3]):

$$\rho_n^{ij} = \frac{3}{2}\rho\, l^i l^j |[\mathbf{l}, \mathrm{rot}\,\mathbf{l}]| / \Delta_0 . \tag{11}$$

В высокочастотном $(\omega\tau \gg 1)$, т. е. в бесстолкновительном пределе, который по-видимому только и может осуществляться в ^{3}He-A при $T = 0$, возбуждения описываются кинетическим уравнением, которое однако нужно записать так, чтобы оно автоматически учитывало конверсию импульса вакуума $\mathbf{j}$ в импульс возбуждений $\mathbf{P}$.

В ^{3}He-A есть и фотоны калибровочного поля $\mathbf{A}$. Это орбитальные волны – бозонные коллективные моды, в которых колеблется вектор $\mathbf{l}$. Они описываются Лагранжианом, полученным градиентным разложением энергии вакуума. При $T = 0$ главный член в Лагранжиане (см. [6])

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}K_3\left([\mathbf{l}, \mathrm{rot}\,\mathbf{l}]^2 - \frac{m^2}{k_F^2}(\partial_t \mathbf{l})^2\right) \cong \frac{K_3}{2k_F^2}(\mathbf{H}_\perp^2 - \mathbf{E}_\perp^2 / c_\parallel^2) \tag{12}$$

с логарифмически расходящимся параметром $K_3/k_F^3 = \dfrac{1}{12\pi^2}\ln\dfrac{\Delta_0^2}{\omega^2}$. Скорость фотонов анизотропна $c_{ij} \cong c_\parallel \hat{z}_i \hat{z}_j$, а логарифмическая расходимость K_3 имеет ту же природу, что и явление поляризации вакуума, приводящее к нуль-зарядной ситуации в квантовой электродинамике: эффективная константа связи между фермионами и фотонами (орбитальными волнами) на малых частотах (или на больших расстояниях) равна

$$\frac{\tilde{e}^2}{\hbar c_\parallel} = \frac{3\pi}{\ln\dfrac{\Delta_0^2}{\omega^2}} .$$

Есть и существенные различия между обеими теориями поля, связанные в основном с неабелевым характером Бозе полей в ^{3}He-A. Это приводит к различным структурам фермионного вакуума в этих системах. В результате вакуумные токи в ^{3}He-A и квантовой электродинамике различны, поскольку определяются глубокими вакуумными уровнями. Конверсия же тока из вакуума в надвакуумные возбуждения описывается одним и тем же швингеровским членом $F^{*}_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$, поскольку осуществляется на "поверхности" вакуума (в ^{3}He-A на ферми-поверхности) и определяется лишь структурой уравнений для возбуждений вблизи поверхности, которая в обеих теориях поля одинакова.

Следствия киральной аномалии для ^{3}He-A можно экспериментально наблюдать при достаточно низкой температуре. В частности конверсия вакуумного импульса в импульс возбуждений, описываемая швингеровским уравнением (9), (10) может быть обнаружена путем измерения импульсов возбуждений, возникающих в зависящей от времени текстуре вектора $\mathbf{l}$.

Литература

1. *Воловик Г.Е., Минеев В.П.* ЖЭТФ, 1981, **81**, 989.

2. *Воловик Г.Е.* Письма в ЖЭТФ, 1985, **42**, 294.

3. *Балацкий А.В., Воловик Г.Е., Конышев В.А.* ЖЭТФ, 1986, **90**, 2038.

4. *Combescot R., Dombre T.* Phys. Rev., 1986, **B33**, 79.

5. *Schwinger J.* Phys. Rev., 1951, **82**, 664.

6. *Gross M.C.* J. Low Temp. Phys., 1975, **21**, 525; *Воловик Г.Е., Минеев В.П.* ЖЭТФ, 1976, **71**, 1129.

Институт теоретической физики им. Л.Д.Ландау
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
21 марта 1986 г.