

Универсальная двумерная кинетика заселенностей ридберговских атомов в плазме

М. Б. Кадомцев, М. Г. Левашова, В. С. Лисица

Российский научный центр “Курчатовский институт”, 123182 Москва, Россия

Поступила в редакцию 26 марта 2007 г.

Развита универсальная кинетика для расчета двумерных (в пространстве главных, n , и орбитальных, l , квантовых чисел) заселенностей ридберговских атомных состояний в плазме. Показано, что квантовый характер радиационного каскада приводит к необходимости учета прямого заселения атомных состояний как трехчастичным, так и радиационным источниками рекомбинации. Последующий двумерный радиационно-столкновительный каскад строится на основе чисто классического подхода. Развитая модель позволяют получить населенности в виде универсальных функций температуры и плотности. Проведенные численные расчеты заселенностей высоковозбужденных водородных состояний ($n \propto 100$) в плазме низкой плотности (10^3 – 10^{13} см $^{-3}$) при умеренных температурах (1 эВ), указывают на существенно неравновесный характер заселения как по n , так и по l , что играет важную роль для диагностики астрофизической и лабораторной плазмы.

PACS: 52.20.–j, 52.25.Dg

1. Введение. Проблема определения заселенностей высоковозбужденных (ридберговских) атомных состояний в плазме представляет значительный интерес как для астрофизических объектов [1], так и для лабораторной плазмы [2]. Большинство подходов основано на одномерной модели заселения состояний, учитывающей только переходы с изменением энергии (главного квантового числа n) в предположении простого статистического заселения по орбитальным моментам l [2, 3]. Переход к двумерной кинетике (по n и l) усложняет задачу вследствие резкого увеличения числа атомных переходов, участвующих в радиационно-столкновительном каскаде. Поэтому нередко кинетику по главным и орбитальным квантовым числам рассматривают раздельно [3]. В то же время, для высоковозбужденных состояний казалось бы естественным применить чисто классическое описание. Такой подход был предложен Беляевым и Будкером [4], которые для описания столкновений атомного электрона с электронами плазмы использовали классическое кинетическое уравнение с интегралом столкновений Ландау.

В действительности радиационно-столкновительный поток формируется в основном в области малых орбитальных моментов, где классическая модель непрерывного течения по атомным уровням уже не работает.

Кроме того, для определения реальной функции распределения необходимо учесть фоторекомбинационный источник заселения состояний, который вносит вклад того же порядка, что и радиационно-

столкновительный каскад из континуума. Включение фоторекомбинационного источника приводит к резкой селективности заселения атомных состояний по орбитальному квантовому числу l и как раз в области столь малых l , где классическая модель уже неприменима.

Предметом настоящей работы является построение двумерной функции распределения на основе классического кинетического уравнения, модифицированного с учетом квантового характера заселения состояний.

В классической постановке столкновительные процессы приводят к диффузии атомного электрона по атомным уровням. Для оценок найдем характерную переданную энергию высоковозбужденному атомному электрону на уровне $n \gg 1$ с типичной скоростью на орбите $v_A \cong e^2/n\hbar$ при его столкновении с плазменным электроном со скоростью $v_p \propto (T/m)^{1/2}$. Если температура плазмы T значительно больше энергии связи ридберговского электрона ($v_p \gg v_A$), то за время соударения ρ/v переданный импульс при больших прицельных параметрах ρ равен $\Delta p \propto e^2/\rho v_p \ll m v_A$ и, соответственно, переданная энергия равна $\Delta E \propto e^2 v_A / \rho v_p$. Определяя отсюда эффективные параметры столкновения с учетом того, что $\Delta E = E_{n-1} - E_n = Z^2/n^3$ (здесь и далее используются атомные единицы), найдем эффективное сечение передачи энергии при столкновении: $\sigma \propto (v_A/v_p \Delta E)^2 \propto (n^2/Z)^2/T$.

Что касается радиационного каскада, то в классической постановке он описывается непрерывным те-

чением функции распределения вдоль характеристик [5, 6]. Такой подход не учитывает, как отмечалось, квантового характера радиационных переходов, сопровождающегося скачкообразным изменением главного квантового числа n . Это приводит к необходимости учета каналов прямого заселения уровней с последующей, уже чисто классической, эволюцией заселенности.

Последовательное рассмотрение кинетики радиационно-столкновительного заселения должно основываться на решении кинетических уравнений, учитывающих как чисто классическую эволюцию функции распределения, так и возможность прямого квантового заселения.

2. Классическое кинетическое уравнение с учетом фоторекомбинационного источника. Классическое кинетическое уравнение для ридберговского атома в плазме имеет вид [4]

$$\frac{\partial f}{\partial t} + [H, f] = \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{\text{coll}} + \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{\text{rad}}, \quad (1)$$

где $H = p^2/2m - Ze^2/r$ – атомный гамильтониан, $(\partial f / \partial t)_{\text{coll}}$ учитывает столкновения со всеми заряженными частицами плазмы, $(\partial f / \partial t)_{\text{rad}}$ описывает классические потери энергии и момента на излучение. Столкновительный член описывается интегралом столкновений Ландау

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{\text{coll}} = \frac{\partial}{\partial p_i} \int dp'_k \omega^{ik} \left(\frac{\partial f}{\partial p_k} f' - \frac{\partial f'}{\partial p'_k} f \right), \quad (2)$$

где f – искомая функция распределения атомного электрона, f' – максвелловская функция распределения электронов плазмы, $\omega^{ik} = 2\pi e^4 z'^2 L \frac{u^2 \delta_{ik} - u_i u_k}{u^3}$ – ядро классического интеграла столкновений Ландау с переданным импульсом $u = p/m - p'/m'$. При $T \gg E_n$ после усреднения в (2) по максвелловскому распределению для f' получаем

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{\text{cm}} &= \frac{\partial}{\partial p_i} \left(\omega^{ik} \frac{\partial f}{\partial p_k} \right), \\ \omega^{ik} &= \int \omega^{ik} f' dp' = \omega \delta_{ik}, \quad \omega = \frac{4\sqrt{2\pi}}{3} e^4 z'^2 n' L \sqrt{\frac{m}{T}}. \end{aligned} \quad (3)$$

В этом приближении уравнение (3) сводится к элементарному уравнению диффузии с постоянным коэффициентом диффузии $D = \omega$. Отсюда легко определить характерные параметры эволюции начального состояния атома с энергией $E_n = -Z^2/2n^2$. Действительно, умножая квадрат переданного импульса на квадрат атомной скорости электрона на орбите $v_A^2 \propto E_n$, найдем:

$$\langle \Delta E^2 \rangle \propto E_n \omega \tau. \quad (4)$$

Переходя в (4) к главным квантовым числам, получаем закон диффузии для изменения главного квантового числа Δn :

$$\langle \Delta n^2 \rangle \propto n^4 \omega \tau. \quad (5)$$

Отсюда видно, что в коэффициент диффузии входит типичное сечение неупругих переходов между близкими уровнями. Интересно отметить, что из (4) следует классическая формула ионизации Томсона при подстановке $\sqrt{\langle \Delta E^2 \rangle} \propto E_n$.

Для получения функции распределения в пространстве энергии E и момента M надо перейти от трехмерного импульсного пространства к трем переменным E, M, M_z , описывающим состояния электрона в атоме. Уместно поэтому использовать в дальнейшем атомную систему единиц и квантовые числа атома n, l, m . Тогда потери на излучение записываются с помощью классических формул [7] (c – скорость света)

$$\dot{n} = -\frac{1}{c^3 l^5} \left(1 - \frac{l^2}{3n^2} \right), \quad \dot{l} = -\frac{2}{3c^3 n^3 l^2}, \quad \dot{m} = \left(\frac{m}{l} \right) \cdot \dot{l}, \quad (6)$$

и преобразования кинетического уравнения от переменных импульса к новым переменным $E, M, M_z(n, l, m)$ [4]. В результате такого преобразования кинетическое уравнение (1) приобретает характерную радиационно-столкновительную структуру:

$$\partial f / \partial t - \hat{D} f + \hat{R} f = q, \quad (7)$$

где дифференциальный оператор второго порядка \hat{D} описывает столкновительную диффузию, а оператор первого порядка \hat{R} – описывает радиационный каскад.

Структура фоторекомбинационного источника может быть получена также из чисто классического рассмотрения [5, 6] либо предельным переходом для квазиклассических радиальных матричных элементов, сводящихся, как известно, к бесследевым функциям [5, 6] (см. ниже). Введение такого источника приводит к появлению дополнительного параметра, связанного с его зависимостью от температуры плазмы. Явный вид этого источника в переменных $n = (2E)^{-1/2}$ и l (зависимость от проекции момента отсутствует в силу изотропии плазмы) дается формулой (в единицах равновесного распределения)

$$\begin{aligned} q(n, l) &= \\ &= \frac{4}{\pi^2 c^3 l^2 n^3} \exp \left(\frac{1}{2n^2 T} \right) \int_{x_0}^{\infty} \exp(-3x/Tl^3) G_0(x) dx, \end{aligned} \quad (8)$$

где $x_0 = l^3/6n^2$, $G_0(x) = x[K_{1/3}^2(x) + K_{2/3}^2(x)]$ – комбинация функций Макдональда.

Источник (8) существенно селективен по моменту l и в меньшей степени – по n : преимущественно заселяются состояния с малыми моментами и малыми главными квантовыми числами.

В действительности классическое кинетическое уравнение не учитывает процессов прямого заселения и распада уровней. Поэтому в классическое уравнение (7) нельзя напрямую подставить фоторекомбинационный источник (8). Квантовое рассмотрение показывает, что классический радиационный каскад формируется лишь после заполнения атомных состояний путем прямого заселения. Такое заселение описывается уравнением

$$\partial f_0/\partial t - \hat{D}f_0 + Af_0 = q, \quad (9)$$

где A – полная скорость радиационного распада с данного уровня, имеющая в приближении Крамерса вид

$$A = 4/\pi\sqrt{3}c^3n^3l^2. \quad (10)$$

Уравнение (9) описывает прямое заселение состояний с его диффузионным размытием вследствие столкновений. Вклад тройной рекомбинации учитывается условием совпадения с равновесным распределением на границе сплошного спектра. Укажем, что это уравнение в одномерном случае совпадает с уравнением, учитывающим столкновительное перемещивание по орбитальным моментам [3].

Отметим, что величина A возникает лишь в квантовом кинетическом уравнении, определяя полную вероятность ухода из данного состояния. Поэтому величина Af_0 служит источником заселения для классического уравнения. Подставляя эту величину в качестве источника в классическое уравнение (7), получим уравнение для функции f_1 , описывающее классический радиационно-столкновительный каскад:

$$\partial f_1/\partial t - \hat{D}f_1 + \hat{R}f_1 = Af_0. \quad (11)$$

Таким образом, полная функция распределения f_{tot} является суммой квантового прямого заселения и последующего классического радиационно-столкновительного каскада:

$$f_{\text{tot}} = f_0 + f_1. \quad (12)$$

В отсутствие столкновительной диффузии такое решение в стационарном случае естественным образом совпадает с аналитическим решением двумерного радиационного каскада [5], в котором функция $f_0 = q/A$ и тем самым правая часть (11) сводится к исходному источнику q .

Таким образом, решение стационарной задачи состоит из двух этапов: на первом определяется функция прямого заселения (11), на втором – это решение в качестве источника подставляется в уравнение классического каскада (9). Такая процедура может быть многократно использована методом последовательных приближений, однако уже на первом шаге (которым мы ограничимся ниже) обеспечивается достаточно высокая точность порядка 10%.

3. Результаты численных расчетов. При решении удобно использовать безразмерную функцию распределения $\psi = f/N_e(2\pi mT)^{-3/2}$, записав для нее кинетическое уравнение и вводя безразмерные переменные: энергии $\xi = n_0/n$, момента $\eta = l/n$, его проекции $\zeta = l_z/l$, меняющиеся в пределах $0 < \xi < \infty$, $0 < \eta < 1$, $-1 < \zeta < 1$, после чего кинетическое уравнение (1) в стационарном случае приводится к виду [4]

$$\begin{aligned} -\frac{\eta}{\xi^4} \cdot q = & \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\frac{\eta}{\xi^4} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \right] + \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\frac{5\eta(1-\eta^2)}{2\xi^6} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \right] - \\ & - \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\frac{\xi^3}{\eta^4} \cdot \left(1 - \frac{\eta^2}{3} \right) \psi \right] - \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\frac{\xi^2}{\eta^3} \cdot (1-\eta^2)\psi \right]. \end{aligned} \quad (13)$$

В качестве характерного главного квантового числа n_0 в (13) выбрано, следуя [4], такое значение, при котором скорости столкновительных и радиационных процессов одного порядка величины:

$$n_0 = [4\sqrt{2\pi}Le^6z_0^2m^{3/2}c^3N_e/3\sqrt{T}]^{-1/8}, \quad (14)$$

где $L = \ln(T/E_0)$ ($E_0 = 1/2n_0^2$) – классический логарифм, определяемый из условия неадиабатичности переходов на верхнем пределе и отсутствия ионизации на нижнем. Члены со вторыми производными в (13) описывают столкновительную диффузию (оператор D в (9), (11)), тогда как с первыми – классический радиационный каскад (оператор R в (11)). Функция A в (9), (11) также очевидным образом выражается через переменные ξ и η .

Решение уравнений (9), (11) в переменных (13) проводилось численно методом сеток. Вначале проведем численное решение этих уравнений для заселения только трехчастичной рекомбинацией, отвечающей граничным условиям термодинамически равновесного заселения при приближении к границе сплошного спектра: $\psi_0(\xi \rightarrow 0) = 1$ в отсутствие фоторекомбинационного источника. Результаты расчетов приведены на рис.1.

Для оценки вклада источника интересно получить решение для $\psi_{\text{tot}} = \psi_0 + \psi_1$ при нулевых граничных условиях с одним лишь источником фоторекомбинационного заселения. Эти данные приведены на рис.2.

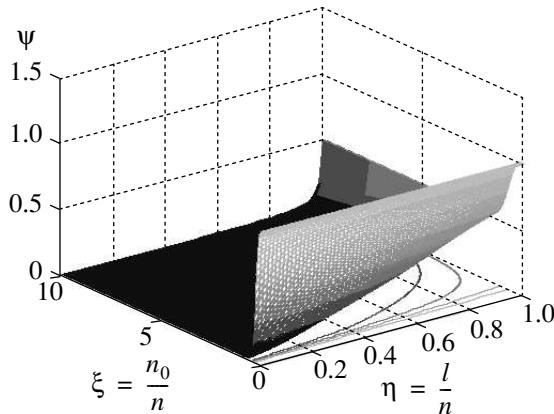


Рис.1. Функция распределения с учетом столкновений с электронами плазмы при термодинамически равновесной заселенности границы дискретного спектра для типичных условий астрофизической плазмы: $N_e = 2500 \text{ см}^{-3}$, $T_e = 1 \text{ эВ}$, $n_0 \sim 50$

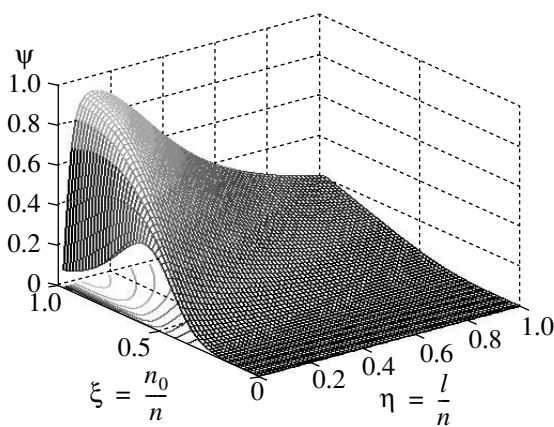


Рис.2. Функция распределения с учетом столкновений при нулевых граничных условиях с источником фоторекомбинационного заселения, $N_e = 2500 \text{ см}^{-3}$, $T_e = 1 \text{ эВ}$, $n_0 \sim 50$

Сравнение рис.1 и 2 показывает, что оба решения оказываются значимыми в существенно разных областях переменных ξ и η .

Приведем далее решение при одновременном действии трехчастичной и фото рекомбинации – рис.3.

Интересно отметить значительный спад населенности по сравнению с термодинамически равновесным пределом $\psi = 1$ в промежуточной области переменных ξ и η .

Для сравнения с предшествующими результатами, полученными в рамках одномерных моделей заселения состояний, полная трехмерная функция распределения была проинтегрирована по переменным η и ξ : $\bar{\psi} \equiv \langle \psi \rangle_{\eta, \xi} = \int \psi \eta d\eta d\xi$. На рис.4 приведены

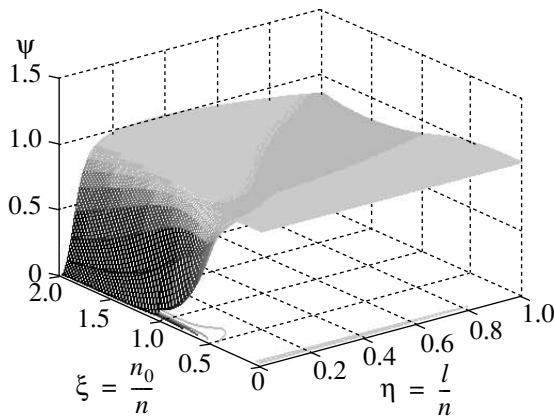


Рис.3. Полная функция распределения с учетом столкновений с электронами плазмы при фоторекомбинационном источнике заселения атомных уровней и термодинамически равновесной заселенности границы дискретного спектра, $N_e = 2500 \text{ см}^{-3}$, $T_e = 1 \text{ эВ}$, $n_0 \sim 50$

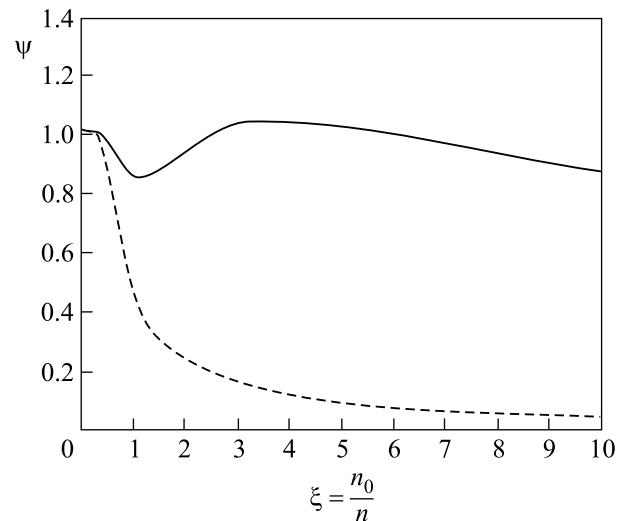


Рис.4. Одномерная функция распределения электронов в атоме с учетом столкновений с электронами плазмы при фоторекомбинационном источнике заселения атомных уровней и термодинамически равновесной заселенности границы дискретного спектра (сплошная кривая), без фоторекомбинационного источника (пунктир), $N_e = 2500 \text{ см}^{-3}$, $T_e = 1 \text{ эВ}$, $n_0 \sim 50$

графики для $\bar{\psi}$ с учетом отдельно трехчастичного и полного (с учетом фоторекомбинации) источников заселения. Сравнение с численными результатами, приведенными в работе [8], обнаруживает характерную немонотонность (провал) в распределении населенности при обоих методах расчета, обусловленную конкуренцией столкновительного и радиационного каналов заселения. Некоторое расхождение при малых главных квантовых числах ($\xi \gg 1$) вызвано сильной неравновесностью двумерной функции рас-

пределения по угловому моменту, связанной с преобладанием круговых орбит: $l \sim n$.

Заключение. Таким образом, развита универсальная кинетика для расчета двумерных (в пространстве главных, n , и орбитальных, l , квантовых чисел) заселенностей ридберговских атомных состояний в плазме трехчастичным и радиационным источниками рекомбинации. Проведены расчеты двумерных заселенностей ридберговских атомных состояний в плазме на основе модифицированной классической модели столкновений и радиационного каскада. Показано, что в этой модели необходим учет каналов прямого заселения фоторекомбинационным источником, являющихся необходимым следствием квантового характера радиационного каскада. Важным результатом является существенно неравновесный характер заселения состояний как по главному, так и по орбитальному квантовым числам, играющий важную роль в диагностике астрофизической и лабораторной плазмы, в частности, для интерпретации спектров радиационных радиолиний, наблюдавшихся в условиях астрофизической плазмы [1, 9, 10].

Авторы благодарны И.Л.Бейгману, В.С.Воробьеву и А.Б.Кукушкину за ценные обсуждения. Работа выполнена при поддержке гранта фундаментальных

исследований № 20 РНЦ КИ, гранта Российского фонда фундаментальных исследований № 06-02-16614-а, гранта Президента РФ № НШ-9878.2006.2 для поддержки ведущих научных школ РФ.

1. Р. Л. Сороченко, М. А. Гордон, *Рекомбинационные радиолинии*, М.: Физматлит, 2003.
2. Л. А. Вайнштейн, И. И. Собельман, Е. А. Юков, *Возбуждение атомов и уширение спектральных линий*, М.: Наука, 1979.
3. I. L. Beigman, *Astroph. Space Phys.* **11**, 1 (2001).
4. С. Т. Беляев, Г.И. Будкер, В сб.: *Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций*, 3, под ред. М. А. Леоновича, Изд. АН СССР, 1957, стр.41.
5. А. Б. Кукушкин, В. С. Лисица, *ЖЭТФ* **88**, 1570 (1985).
6. Л. А. Буреева, В. С. Лисица, *Возмущенный атом*, М.: ИздАт, 1997.
7. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Теория поля*, М.: Наука, 1988.
8. V. S. Strelnitski, V. O. Ponomarev, and H. A. Smith, *Astroph. J.* **470**, 1118 (1996).
9. M. B. Bell, L. W. Avery, E. R. Seaquist, and J. P. Valiee, *Public. Astron. Soc. of the Pacific* **112**, 1236 (2000).
10. H. R. Griem, *Astroph. J.* **620**, L-133 (2005).