Письма в ЖЭТФ, том 45, вып. 4, стр. 168 – 171 *25 февраля 1987 г.*

СТАТИСТИЧЕСКИЕ СУММЫ ДЛЯ ОТКРЫТЫХ И / ИЛИ ОРИЕНТИРОВАННЫХ СТРУН

А.Морозов, А.Рослый

Описано отображение пространств модулей открытых и/или неориентируемых римановых поверхностей в пространства модулей замкнутых ориентируемых поверхностей. При таком отображении вклады в статистические суммы и амплитуды бозонных струн выражаются через меру Мамфорда.

В первично-квантованной теории струн в критической размерности пространства-времени всем физическим величинам сопоставляются меры интегрирования на универсальном пространстве модулей римановых поверхностей. Для петлевого разложения существенны компоненты этого пространства – пространства модулей поверхностей с заданной топологией. Зам-

кнутым неориентированным бозонным струнам отвечают замкнутые ориентированные римановы поверхности без края. Такие поверхности имеют единственную топологическую характеристику – род p – натуральное число (число ручек). Соответствующее пространство модулей M_p комплексно, и мера интегрирования на нем, определяющая p-петлевой вклад в статсумму струн, равна [1]

$$dv_p \simeq |d\mu^{(p)}_{bos}|^2 / (\det \operatorname{Im} T)^{13\,(14)} . \qquad (1)$$

Формулы для других струнных теорий также удобно сводить к некоторым выражениям, определенным на M_p, хотя естественные пространства модулей, возникающие в этих задачах, не совпадают с M_p. Например, для суперструн и гетеротических струн исходным является пространство супермодулей, и мера на M_p возникает только после интегрирования по нечетным образующим этого пространства.

В этой статье мы рассматриваем статистические суммы (вакуумные диаграммы) открытых и/или ориентированных струн. Новый элемент здесь состоит в появлении вкладов неориентируемых римановых поверхностей и/или поверхностей с краем. Их топология характеризуется тремя неотрицательными целыми числами; числом ручек h, числом отверстий m и числом отверстий, заклеенных листами Мебиуса c. Поверхность ориентируема только если $c = 0$. Пространства модулей таких поверхностей, $M_{h,c,m}$ при $c, m \neq 0$ ($M_{p,00} = M_p$) не являются комплексными, и их вещественная размерность равна $\dim_R M_{h,c,m} = 6h + 3c + 3m - 6 + \rho_{h,c,m}$. Здесь $\rho_{h,c,m}$ – размерность непрерывной группы конформных отображений поверхности на себя, $\rho \neq 0$ только для диска, сферы, проективного пространства, кольца, тора, бутылки Клейна и листа Мебиуса.

Меры на пространствах $M_{h,c,m}$, отвечающие струнным статсуммам приобретают простой вид после вложения $M_{h,c,m}$ в пространства M_p с $p = 2h + c + m - 1$ как вещественных пространств половинной размерности. Это вложение описывается в терминах дублей римановых поверхностей, а мера выражается через меру Мамфорда $d\mu^{(p)}_{bos}$.

Каждой открытой и/или неориентируемой римановой поверхности S сопоставляется дубль D – замкнутая ориентируемая поверхность с антиголоморфной Z_2-изометрией, так что $S = D/Z_2$ [2]. (Например, для диска и проективной плоскости RP^2 дублем является сфера; для кольца, бутылки Клейна и листа Мебиуса – тор и т. п.). Не всякая замкнутая ориентируемая поверхность является чьим-то дублем. Обычно антиголоморфное Z_2-преобразование типа $z \to \bar{z}$ переводит одну поверхность в какую-то другую: на пространстве M_p действует своя антиголоморфная Z_2-изометрия. Пространство модулей дублей M_p^D это множество неподвижных точек этой изометрии в M_p.

Действие антиголоморфной изометрии особенно просто задается не на самом M_p, а на пространстве Зигеля σ_p – множестве матриц периодов [1], в которое M_p голоморфно вкладывается; более точно, $M_p \subset \sigma_p / \mathrm{Sp}(p, Z)$. Изометрия действует на σ_p по правилу $T \to -\bar{T}$. M_p^D – это пересечение M_p с множеством неподвижных точек этого отображения, $T = [S(-\bar{T}) + R] / [-P(-\bar{T}) + Q]$, где $\begin{pmatrix} S & R \\ -P & Q \end{pmatrix} \in \mathrm{Sp}(p, Z)$ – симплектическая матрица с квадратом равным единице, из чего следует, что $S = -\tilde{Q}$. Это уравнение на матрицу периодов равносильно более простому:

$$(PT + Q)(P\bar{T} + Q) = I , \qquad (2)$$

и разные выборы $p \times p$ матриц P и Q (ограниченных условием симплектичности $\begin{pmatrix} -\tilde{Q} & R \\ -P & Q \end{pmatrix} \in \mathrm{Sp}(p, Z)$), определяют разные компоненты пространства модулей дублей M_p^D [1)].

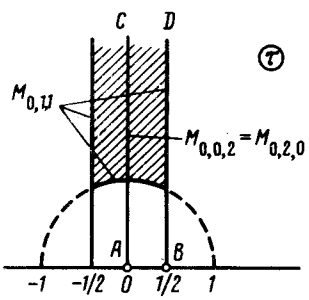
[1)] По-видимому, справедливо следующее более изящное описание M_p^D: геодезические (в смысле метрики, индуцированной инвариантной метрикой $\mathrm{Tr}\, dT (\operatorname{Im} T)^{-1} d\bar{T} (\operatorname{Im} T)^{-1}$ на σ_p) подпространства половинной размерности в M_p, пересекающиеся в особых точках M_p.

Эти компоненты как раз и являются пространствами модулей $M_{h,c,m}$. Если Z_2-изометрия дубля не имеет неподвижных точек, то после факторизации по ней получится неориентируемая замкнутая поверхность, $m = 0$. Если Z_2-изометрия имеет неподвижные точки, то они образуют границу поверхности с краем. Если неподвижные линии разделяют поверхность на две несвязные компоненты, то получается ориентируемая поверхность с краем, $c = 0$. Если при отбрасывании неподвижных линий дубль остается связным, то в результате факторизации возникает неориентируемая поверхность с краем, $c, m \neq 0$.

Искомая мера интегрирования на $M_{h,c,m}$ определяющая струнные статсуммы, выражается через $d\mu^{(p)}_{bos}$, входящую в формулу (1) для замкнутых неориентированных струн; $p = 2h + c + m - 1$:

$$d\nu_{h,c,m} = [f_{\pm}(P, Q)/\det(PT + Q \pm I)]^{13(14)} d\mu^{(p)}_{bos}. \qquad (3)$$

Множители $f_{\pm}(P, Q)/\det(PT + Q \pm I)$ можно описать геометрически следующим образом. Напомним, что величину $\det \operatorname{Im} T$ в (1) можно охарактеризовать как объем якобиана относительно меры $\omega\bar{\omega}$, где ω – это p-форма, произведение базисных голоморфных 1-дифференциалов, нормированных на A-периоды. На якобиане поверхности, являющейся дублем, также имеется естественное действие антиголоморфной Z_2-симметрии. Рассмотрим два вещественных p-мерных подтора в якобиане, один из которых состоит из инвариантных точек, а другой – из точек, меняющих знак при этом действии. Тогда величины $\det(PT + Q \pm I)/f_{\pm}$ даются интегралами от ω по этим подторам. (Например, для рода 1 числа $f_{\pm}$ – это наибольшие общие делители чисел P и $Q \pm 1$). Поэтому $\det(PT + Q + I)\det(P\bar{T} + Q - I)/f_+ f_- \sim \det \operatorname{Im} T$, и, как видно из этого, мера $d\nu_{h,c,m}$ очень похожа на "корень квадратный" из $d\nu_p$. Множители $\det(PT + Q \pm I)$ дополняют меру Мамфорда $d\mu^{(p)}_{bos}$ до вещественного выражения на $M_{h,c,m}$. Кроме того, они обеспечивают модулярную ковариантность: при преобразованиях из группы $\mathrm{Sp}(p, Z)$ формула (3) переходит в себя, только с измененными матрицами P и Q. Модулярные преобразования, не изменяющие уравнение (2), заменяют в (3) "плюс" на "минус". Пространство M^D_p для $p = 1$ изображено на рисунке. (А.Цейтлин сообщил нам, что случай рода 1 уже анализировался в литературе [3]). Доказательства сделанных утверждений, включая вывод выражения (3) из континуального интеграла, будут даны в более подробной статье.



Пространство M_1 (заштриховано) и вложение в него пространств модулей колец $M_{0,0,2}$, бутылок Клейна $M_{0,2,0}$ и листов Мебиуса $M_{0,1,1}$

Данное выше описание статсумм для открытых и/или ориентированных струн в терминах пространств M_p определяет, помимо прочего, естественную относительную асимптотику выражений для различных струнных диаграмм вблизи границ пространства модулей. (По другому можно сказать, что оно обеспечивает согласованную регуляризацию этих выражений). Например, для рода $p = 1$ (см. рисунок) выражения для $d\nu_{0,0,2}$ (кольцо) и $d\nu_{0,1,1}$ (лист Мёбиуса) должны совпадать в унитарном пределе – в точках A, B (при этом риманова поверхность вырождается в бесконечно тонкую полоску, и "работает" разложение по струнным возбуждениям). Тогда в ультрафиолетовом пределе – в точках C, D – относительная нормировка двух вкладов отличается в 2^{14} раз. (Это простое следствие того факта, что при модулярных преобразованиях, переводящих точку A в C, $\tau \to -(1/\tau)$, и точку B в D,

$\tau \to \dfrac{\tau - 1}{2\tau - 1}$ форма веса 14 приобретает соответственно множители τ^{14} и $(2\tau - 1)^{14} = 2^{14}(\tau - 1/2)^{14}$). При переходе к суперструнным амплитудам фактор 2^{14} превращается в $2^5 = 32$, который обеспечивает сокращение расходимостей и аномалий для открытых ориентированных струн с калибровочной группой $SO(32)$.

Представляет интерес также описание пространств модулей поверхностей с отмеченными точками, отвечающих амплитудам рассеяния струнных возбуждений, в терминах пространств M_p с более высоким p. Более подробное обсуждение затронутых вопросов будет опубликовано.

Литература

1. *Белавин А., Книжник В.* ЖЭТФ, 1986, **91**, 364.
2. *Шиффер М., Спенсер Д.* Функционалы на конечных римановых поверхностях. М.: ИИЛ, 1957.
3. *Burgess C.P., Morris T.R.* I.A.S. preprints, 1986,.

Институт теоретической
и экспериментальной физики

Поступила в редакцию
12 ноября 1986 г.
После переработки
21 января 1987 г.