Письма в ЖЭТФ, том 45, вып. 5; стр. 215 – 216 *10 марта 1987 г.*

УРАВНЕНИЕ НЕРАЗРЫВНОСТИ СПИРАЛЬНОСТИ В СРЕДАХ С БЕСКОНЕЧНОЙ ПРОВОДИМОСТЬЮ

В.А.Гордин, В.И.Петвиашвили

Показывается, что плотность спиральности магнитного поля при специальной калибровке вектор-потенциала удовлетворяет уравнению неразрывности. Найдена новая функциональная серия сохраняющихся интегралов по объему бесконечно проводящей среды.

Уравнения электромагнитного поля в средах, в которых электрическая проводимость бесконечна, а плотность тока конечна, имеют релятивистски инвариантный вид:

$$\partial_t \mathbf{B} = -c \operatorname{rot} \mathbf{E}; \quad \mathbf{E} = [\mathbf{B}, \mathbf{v}] / c. \tag{1}$$

Здесь $\mathbf{v}$ – скорость среды. В дальнейшем она считается произвольной функцией от времени и координат. Из (1) следует теорема вмороженности о сохранении потока магнитного поля через произвольный замкнутый контур, точки которого перемещаются со скоростью $\mathbf{v}$ (жидкий контур).

Выведем из (1) уравнение неразрывности, откуда будут следовать законы сохранения в жидком объеме. Для этого введем вектор-потенциал $\mathbf{A}$, откалиброванный следующим образом:

$$\mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A}, \quad c\mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{A} - \nabla (\mathbf{A}\mathbf{v}). \tag{2}$$

Легко проверить, что для любых решений (1), в том числе и $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$, вектор-функция $\mathbf{A}$ определена и притом с точностью до прибавления $\nabla\psi$, где ψ – произвольное решение уравнения $\partial_t\psi + \mathbf{v}\nabla\psi = \mathrm{const}$.

Введем псевдоскаляр -- плотность спиральности $s = \mathbf{AB}$. Из (1), (2) следует, что s удовлетворяет уравнению неразрывности:

$$\partial_t s + \operatorname{div}(s\mathbf{v}) = 0 . \tag{3}$$

Если плотность ρ и давление p удовлетворяют уравнениям:

$$\partial_t\rho + \operatorname{div}(\rho\mathbf{v}) = 0; \quad \partial_t p + \mathbf{v}\nabla p = -\gamma p \operatorname{div}\mathbf{v} , \tag{4}$$

то имеется функциональная серия первых интегралов системы (3), (4)

$$I = \int_V s f(\rho/s,\, p^{1/\gamma}/s)\, d\mathbf{r} , \tag{5}$$

где f – произвольная функция двух переменных, V – произвольный объем, точки которого перемещаются со скоростью $\mathbf{v}$.

При $f \equiv 1$, V – полный объем (5) переходит в интеграл спиральности, найденный в [1], который был использован для исследования устойчивости бессиловых конфигураций ($p = \mathrm{const}$) плазмы в [2,3]. Интеграл (5) может быть использован для исследования устойчивости течений и структур при $\nabla p \neq 0$.

Авторы выражают благодарность В.Д.Шафранову за стимулирующие обсуждения.

Литература

1. *Woltjer L.* Proc. Nat. Acad. Sci., 1958, **44**, 489.
2. *Taylor J.B.* Phys. Rev. Lett., 1974, **33**, 1139.
3. *Rosenbluth M.N., Bussac M.N.* Nuclear Fusion, 1979, **19**, 489.

Институт атомной энергии
им. И.В.Курчатова

Поступила в редакцию
10 января 1987 г.