Письма в ЖЭТФ, том 77, вып. 1, с. 51 – 56 

# О кодировании в параллельном квантовом канале связи в реальном времени

С. Н. Молотков[1)]

Институт физики твердого тела РАН, 142432 Черноголовка, Московская обл., Россия

Факультет вычислительной математики и кибернетики, МГУ, 119889 Москва, Россия

Поступила в редакцию 12 ноября 2002 г.
После переработки 3 декабря 2002 г.

Теоремы кодирования, формулируемые как протоколы обмена в пространстве состояний квантовых систем, не отвечают на один из основных вопросов о скорости передачи информации в реальном времени. В данной работе получены выражения пропускной способности для бинарного квантового канала связи, описывающие скорость передачи информации в реальном времени.

PACS: 03.65.Bz, 42.50.Dv, 89.70.+c

Пропускная способность канала связи является основной характеристикой, определяющей в асимптотическом пределе длинных последовательностей скорость передачи информации со сколь угодно малой вероятностью ошибки [1, 2]. В квантовых каналах связи носителями классической информации являются квантовые состояния, извлечение классической информации из квантовых систем происходит посредством измерений. Возможна также передача через канал связи квантового состояния как такового (передача квантовой информации).

Для квантовых каналов связи к настоящему времени получен ряд глубоких и красивых результатов [3 – 6], обобщающих теоремы Шеннона для классических каналов. Обзор результатов о теоремах кодирования для квантовых каналов связи приведен в обзоре Холево [3].

Обычно теоремы кодирования при вычислении пропускной способности для квантовых каналов формулируются как протоколы, где используются лишь свойства пространства состояний. Любая передача информации, как при помощи квантовых, так и классических состояний, происходит в пространстве и времени. Теоремы кодирования, сформулированные как протоколы в пространстве состояний квантовых систем, не отвечают на один из основных вопросов о скорости передачи информации в реальном времени. В данной работе получены явные выражения пропускной способности для бинарного квантового канала связи, которые описывают скорость передачи информации в реальном времени. Ниже будет рассмотрена ситуация независимых параллельных каналов связи с конечным временем наблюдения. В отличие от последовательного релятивистского канала связи в данной ситуации удается получить пропускную способность канала в конечной аналитической форме. Носителями информации являются одночастичные состояния релятивистской безмассовой частицы (фотона). Классическая информация кодируется в состояния поляризации. Ситуация множества параллельных независимых каналов не означает, что обязательно требуются, например, много оптоволоконных линий. Множество параллельных каналов может быть реализовано на базе одного канала с конечной частотной полосой (многомодового). Каждому каналу тогда отвечает своя частотная полоса.

Квантовый канал задается отображением (супероператором) входных матриц плотности в выходные. Ниже рассматривается идеальный канал связи, неидеальность возникает из-за конечного временного окна наблюдения на приемном конце. Такая неидеальность может быть эффективно описана при помощи некоторого супероператора. Для бинарного квантового канала удается найти оптимальную пространственно-временную форму (амплитуду) состояний, при которой достигается максимум пропускной способности при заданном временном окне наблюдения и частотной полосе пропускания канала. Более того, полученное выражение для пропускной способности сохраняет свой функциональный вид и в том случае, когда измерения на приемном конце производятся в движущейся инерциальной системе отсчета по отношению к источнику.

Будем рассматривать ситуацию, когда символам бинарного алфавита $\{0, 1\}$, выбираемым с вероятнос-

[1)] Основной адрес: Институт физики твердого тела РАН.

тями $\{\pi_0, \pi_1\}$ $(\pi_0 + \pi_1 = 1)$, отвечают однофотонные чистые состояния вида

$$|\varphi_\mu\rangle = \int d\hat{x}\varphi(\hat{x})\varphi_\mu^+(\hat{x})|0\rangle =$$
$$= \int \frac{dk}{k}\varphi(k, k_0 = |k|)a_\mu^+(\hat{k})|0\rangle, \quad \mu = 0, 1, \qquad (1)$$

где $[a_i^-(\hat{k}), a_{i'}^+(\hat{k}')] = \delta_{i,i'}k_0\delta(k-k')$, $|k\mu\rangle = a_\mu^+(\hat{k})|0\rangle$, $\langle ki|k'i'\rangle = k_0\delta_{ii'}\delta(k-k')$, $i, i' = \pm$, и индекс поляризации $\mu$, отвечающий 0 и 1 (состояния в общем случае неортогональны), $a_\mu^+(\hat{k}) = \alpha_\mu a_0^+(\hat{k}) + \beta_\mu a_1^+(\hat{k})$, $(|\alpha_\mu|^2 + |\beta_\mu|^2 = 1)$, а индекс $i$ соответствует ортогональным базисным состояниям спиральности.

Далее будем рассматривать состояния поля, распространяющиеся в одном направлении оси $x$ $(k > 0)$, именно такие состояния переносят информацию между удаленными пользователями:

$$|\varphi_\mu\rangle = \int_0^\infty \frac{dk}{k}\tilde{\varphi}(k,k)|k\mu\rangle =$$
$$= \int_0^\infty dk\varphi(k)|k\mu\rangle = \int_{-\infty}^\infty d(x-t)\varphi(x-t)|x-t,\mu\rangle, \quad (2)$$
$$\varphi(k) = \frac{\tilde{\varphi}(k,k)}{\sqrt{k}},$$

$$\varphi(x-t) = \int_0^\infty e^{-i(k(x-t)}\varphi(k)dk,$$
$$|x-t,\mu\rangle = \int_0^\infty e^{ik(x-t)}|k\mu\rangle, \quad \langle\varphi_\mu|\varphi_\mu\rangle = 1. \qquad (3)$$

Физические состояния в $\mathcal{H}$ определяются значениями амплитуды на массовой поверхности. Амплитуда состояний, распространяющихся в одном направлении, зависит лишь от разности $\tau = x - t$, что отражает тот факт, что если результат измерения имел место в момент $t$ в окрестности точки $(x, x+dx)$, то такой же результат может быть получен в момент $t'$ в окрестности точки $(x', x'-x+t+dx)$. Далее для краткости будем говорить, что амплитуда $\varphi(\tau)$ задана на ветви светового конуса.

Будем пока считать, что пространственная амплитуда одинакова для различных состояний поляризации, и матрица плотности отдельного канала – $\rho = \pi_0\rho_0 + \pi_1\rho_1 = \pi_0|\varphi_0\rangle\langle\varphi_0| + \pi_1|\varphi_1\rangle\langle\varphi_1|$. Для ансамбля сообщений длины $n$ в $n$ различных каналах матрица плотности соответственно $\rho^{\otimes n} = \rho\otimes\rho\ldots\rho$. Теоремы кодирования для источника в квантовом случае, когда сообщения описываются тензорным произведением одиночных посылок сообщений, так же как и в классическом случае, используют идею типичных последовательностей [1] и случайного кодирования. Последовательности $M$ кодовых слов длиной $n$ выбираются случайным образом в соответствие с распределением $\{\pi_0, \pi_1\}$ – $|\varphi_{\vec{\mu}}^M\rangle = |\varphi_{\mu_1}^M\rangle \otimes |\varphi_{\mu_2}^M\rangle \ldots |\varphi_{\mu_n}^M\rangle$.

Измерения на приемном конце сводятся к проекции на кодовые слова (см. детали в [3–6]). Пространством результатов, на котором возникает распределение вероятностей при декодировании, является набор дискретных значений индекса $\boldsymbol{\mu} = \{\mu_1, \mu_2 \ldots \mu_n\}$ для набора из $M$ кодовых слов сообщений длины $n$. Принципиальное отличие решающего правила (разбиения единицы) при конечном временном окне $T$ на приемном конце состоит в том, что пространство результатов в этом случае является прямым произведением $\Omega = [(\tau_1 \in T, \mu_1) \bigcup (\tau_1 \notin T, \mu_1)] \times \ldots \times [(\tau_n \in T, \mu_n) \bigcup (\tau_n \notin T, \mu_n)]$. При декодировании результат измерения в каждом из каналов (при каждом значении индекса поляризации $\mu_k$, $k = 1, \ldots, n$) независимо от других каналов может иметь место во временном окне $\tau_k \in T$ для $|\varphi_{\mu_k}\rangle$ либо иметь место вне временного окна наблюдения $\tau_k \notin T$. То есть для наблюдателя такие исходы означают просто отсутствие срабатывания детектора во временном окне $T$.

Поскольку информация кодируется в состояния поляризации, а пространственные степени свободы носят вспомогательный характер лишь как "носитель" поляризации, то любой оператор, измеряющий состояние поляризации в конечном временном окне, может быть разложен по базисным операторам вида

$$X_{ii'} = \int_0^\infty \frac{dk}{k}|ki\rangle\langle ki'| = \mathcal{M}_{ii'}(\tau \in T) + \mathcal{M}_{ii'}(\tau \notin T), \qquad (4)$$

$$\mathcal{M}_{ii'}(\tau \in T) =$$
$$= \int_T \frac{d\tau}{2\pi}\left(\int_0^\infty \frac{dk}{\sqrt{k}}e^{ik\tau}|ki\rangle\right)\left(\int_0^\infty \frac{dk'}{\sqrt{k'}}e^{-ik'\tau}\langle k'i'|\right), \quad (5)$$

аналогично для $\mathcal{M}_{ii'}(\tau \notin T)$. Любое измерение состояний поляризаций в конечном временном окне сводится к редуцированной матрице плотности, которая получается в результате взятия частичного следа по пространственно-временной переменной $\tau$, имеем

$$\rho_{ii'} = \mathrm{Tr}_\tau\{\rho X_{ii'}\} =$$
$$= \mathrm{Tr}_\tau\{\rho\mathcal{M}_{ii'}(\tau \in T)\} + \mathrm{Tr}_\tau\{\rho\mathcal{M}_{ii'}(\tau \notin T)\} =$$
$$= \rho_{ii'}(\tau \in T) \bigoplus \rho_{ii'}(\tau \notin T). \qquad (6)$$

Первое слагаемое описывает исходы во временном окне $T$, второе слагаемое – вне временного окна.

Для наблюдателя такие исходы отвечают отсутствию срабатывания измерительного устройства. Знак прямой суммы использован, чтобы подчеркнуть тот факт, что редуцированная матрица плотности как оператор действует в ортогональных пространствах в том смысле, что измерения по извлечению информации из поляризационных степеней свободы имеют взаимоисключающие исходы во временном окне наблюдения и вне его, независимо от состояний поляризации.

С этого момента задачу можно свести к вычислению пропускной способности канала связи, который описывается эффективным супероператором, действующим на полную матрицу плотности и переводящим ее в редуцированную, содержащую только поляризационные степени свободы. Имеем

$$\mathcal{T}[\rho] = \rho_{ii'}(\tau \in T) \bigoplus \rho_{ii'}(\tau \notin T). \qquad (7)$$

Для чистых состояний редуцированная матрица плотности может быть представлена в удобном символическом виде:

$$\mathcal{T}[\rho_{\mu_l}] = (1-\varepsilon)|\mu_l\rangle\langle\mu_l| + \varepsilon|?\rangle\langle ?|, \quad l = 0,1. \qquad (8)$$

$$\begin{gathered}(1-\varepsilon)|\mu_l\rangle\langle\mu_l| = \\ = \int\limits_{T} \frac{d\tau}{2\pi} \left( \int\limits_0^\infty \int\limits_0^\infty \frac{dkdk'}{\sqrt{kk'}} \tilde{\varphi}(k) e^{ik'\tau} \sum_{i=0,1} \langle k'i|k\mu_l\rangle \right) \times \\ \times \left( \int\limits_0^\infty \int\limits_0^\infty \frac{dkdk'}{\sqrt{kk'}} \tilde{\varphi}^*(k) e^{-ik'\tau} \sum_{i=0,1} \langle k\mu_l|k'i\rangle \right) = \\ = \int\limits_{T} \frac{d\tau}{2\pi} |\varphi(\tau)|^2 \left( \sum_{i=0,1} [\delta_{i,0}\alpha_{\mu_l} + \delta_{i,1}\beta_{\mu_l}] \right) \times \\ \times \left( \sum_{i'=0,1} [\delta_{i',0}\alpha^*_{\mu_l} + \delta_{i',1}\beta^*_{\mu_l}] \right), \end{gathered} \qquad (9)$$

$$\begin{gathered}\varepsilon|?\rangle\langle ?| = \\ = \int\limits_{\overline{T}} \frac{d\tau}{2\pi} \left( \int\limits_0^\infty \int\limits_0^\infty \frac{dkdk'}{\sqrt{kk'}} \tilde{\varphi}(k) e^{ik'\tau} \sum_{i=0,1} \langle k'i|k\mu_l\rangle \right) \times \\ \times \left( \int\limits_0^\infty \int\limits_0^\infty \frac{dkdk'}{\sqrt{kk'}} \tilde{\varphi}^*(k) e^{-ik'\tau} \sum_{i=0,1} \langle k\mu_l|k'i\rangle \right). \end{gathered} \qquad (10)$$

Здесь введены формальные обозначения для исходов вне временного окна наблюдения $|?\rangle$. Данное состояние ортогонально любому базисному состоянию, $\langle ?|i\rangle \equiv 0$. Далее

$$\begin{gathered}\mathcal{T}[\rho] = \pi_0(1-\varepsilon)|\mu_0\rangle\langle\mu_0| + \pi_1(1-\varepsilon)|\mu_1\rangle\langle\mu_1| + \varepsilon|?\rangle\langle ?|, \\ \mathcal{T}[\rho_{0,1}] = (1-\varepsilon)|\mu_{0,1}\rangle\langle\mu_{0,1}| + \varepsilon|?\rangle\langle ?|, \end{gathered} \qquad (11)$$

и энтропия фон Неймана (максимум пропускной способности достигается при $\pi_0 = \pi_1 = 1/2$ [3])

$$\begin{gathered}H(\mathcal{T}[\rho]) = -(1-\varepsilon)\log(1-\varepsilon) - \varepsilon\log\varepsilon - (1-\varepsilon) \times \\ \times \left[ \left(\frac{1-\xi}{2}\right) \log\left(\frac{1-\xi}{2}\right) + \left(\frac{1+\xi}{2}\right) \log\left(\frac{1+\xi}{2}\right) \right], \end{gathered} \qquad (12)$$

$$\pi_{0,1} H(\mathcal{T}[\rho_{0,1}]) = -\pi_{0,1}\left[(1-\varepsilon)\log(1-\varepsilon) + \varepsilon\log\varepsilon\right], \qquad (13)$$

где (см. (9)) $\xi = |\langle\mu_0|\mu_1\rangle|$. С этого момента задачу можно формально свести к вычислению пропускной способности канала связи задаваемым супероператором (7), (8). Пропускная способность может быть вычислена по формуле Холево [3–6]; с учетом (7)–(13), имеем

$$C(T) = \max_{\{\pi_0,\pi_1\}} \left\{ H(\mathcal{T}[\rho]) - \sum_{i=0,1} \pi_i H(\mathcal{T}[\rho_i]) \right\}. \qquad (14)$$

Для чистых входных состояний имеем

$$\begin{gathered}C(T) = (1-\varepsilon)C(\xi) = -(1-\varepsilon) \times \\ \times \left[ \left(\frac{1-\xi}{2}\right) \log\left(\frac{1-\xi}{2}\right) + \left(\frac{1+\xi}{2}\right) \log\left(\frac{1+\xi}{2}\right) \right], \end{gathered} \qquad (15)$$

Данный результат становится интуитивно особенно прозрачным для случая входных чистых ортогональных состояний (в этом случае $\xi = 0$) и $C(T) = 1-\varepsilon$. В этом случае (16) переходит в выражение для пропускной способности для классического бинарного стирающего канала с переходными вероятностями $p(0|0) = p(1|1) = 1-\varepsilon$, $p(0|?) = p(1|?) = \varepsilon$ и $p(0|1) = p(1|0) = 0$ ($p_0 = p_1 = 1/2$, $p_? = 0$). Для чистых входных ортогональных состояний число типичных последовательностей длины $n$ ($n \to \infty$) для источника стремится к $2^{n\cdot H(\rho)}$.

Если на выходном конце канала связи измерения проводятся в большом временном окне (формально $T \to \infty$), то из-за достоверной различимости ортогональных состояний (в этом пределе состояния доступны целиком) число безошибочно декодируемых последовательностей равно $2^{n\cdot H(\rho)}$. При этом для ортогональных состояний (в бинарном канале) не требуется коллективных измерений, а достаточно измерять состояния в каждой отдельной посылке. Если же измерения проводятся в конечном временном окне $T$, то при измерениях будут исходы, когда измерительное устройство вообще не срабатывает в течение $T$. Вероятность такого события $\varepsilon$, соответственно вероятность срабатывания внутри временного окна будет $1-\varepsilon$. Если срабатывание в течении $T$ было, то состояния идентифицируются достоверно. При отсутствии исхода внутри временного окна можно считать, что имеет место стирание состояния (формально состояние переходит на приемном конце в некоторое новое состояние ?, формально также можно считать, что на входе это состояние посылается с вероятностью $p_? = 0$). Каждая типичная последовательность раздувается при этом в сферу Хэмминга (Hamming) радиуса $H(x|y)$. Здесь $H(x|y)$ – условная энтропия Шеннона для входного ($x = \{0,1,?\}$) с вероятностями $\{p_0 = 1/2, p_1 = 1/2, p_? = 0\}$ и выходного ($y = \{0,1,?\}$) алфавитов, и переходными вероятностями в канале $p(0|0) = p(1|1) = 1-\varepsilon$, $p(0|1) = p(1|0) = 0$, $p(0|?) = p(1|?) = \varepsilon$. Поэтому число безошибочно декодируемых последовательностей при $n \to \infty$ будет равно

$$\frac{2^{nH(\rho)}}{2^{nH(x|y)}} = 2^{nI(x:y)}, \quad I(x:y) = 1-\varepsilon, \qquad (16)$$

что совпадает с пропускной способностью классического бинарного стирающего канала связи [2]. Для неортогональных входных состояний имеет место формула (15).

Если полоса пропускания канала связи имеет конечную полосу $\Delta k$ (скорость света $c = 1$), то максимум пропускной способности (при фиксированных углах векторов поляризации $\xi$ и временном окне $T$) достигается на состояниях с такой пространственно-временной амплитудой $\varphi(k)$, которые реализуют максимум величины $\varepsilon$ и имеют носители внутри полосы пропускания $\Delta k$, что приводит к вариационной задаче на безусловный экстремум (максимум) функционала

$$\mathcal{F} = \frac{\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int\limits_T |\varphi(\tau)|^2 d\tau}{\displaystyle\int\limits_0^\infty |\varphi(k)|^2 dk}. \qquad (17)$$

Вариация функционала приводит к интегральному уравнению на амплитуду:

$$\lambda_n\varphi_n(k) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{\Delta k} \frac{\sin(k-k')T}{k-k'}\varphi(k')dk', \ \mathrm{supp}\varphi(k) \in \Delta k. \qquad (18)$$

Максимальное собственное число дает максимум функционала, а собственная функция этого собственного числа дает оптимальную форму состояния. Данное уравнение исследовалось ранее в работах [7–9], собственные числа уравнения положительны и образуют убывающую последовательность с ростом номера $n$ ($1 > \lambda_0 > \lambda_1 \ldots > 0$, $n = 0, 1 \ldots \infty$). Собственные числа являются функцией параметра $\Delta k \cdot T$, несколько первых собственных чисел при разных значениях параметра $\Delta k \cdot T$ найдены численно в работе [8] (при больших значениях параметра $\Delta k \cdot T$ они быстро стремятся к 1, например, при $\Delta k \cdot T = 4$, $\lambda_0 = 0.99589$). Известна также асимптотика при *фиксированном номере* $n$ от параметра $\Delta k \cdot T \gg 1$ [9]:

$$\lambda_n(\zeta) \sim 1 - \frac{4\sqrt{\pi}8^n}{n!}\zeta^{n+1/2}e^{-2\zeta}, \quad \zeta = \Delta k \cdot T, \qquad (19)$$

то есть собственные числа экспоненциально близки к единице. Последнее означает, что ошибка при различении ортогональных состояний при большом временном окне ($T \gg 1/\Delta k$) экспоненциально мала, а пропускная способность канала экспоненциально близка к единице. При малых значениях параметра $\Delta k \cdot T \ll 1$ собственное число $\lambda_0 \sim \Delta k \cdot T$ и пропускная способность $C \sim (\Delta k \cdot T)^2 \ll 1$. Таким образом, пропускная способность канала с ограниченной частотной полосой и конечным временным окном описывается формулой

$$C_T = \frac{C(\Delta k \cdot T)}{\Delta k \cdot T} = -\frac{\lambda_0(\Delta k \cdot T)}{\Delta k \cdot T}\times$$
$$\times\left[\left(\frac{1-\xi}{2}\right)\log\left(\frac{1-\xi}{2}\right) + \left(\frac{1+\xi}{2}\right)\log\left(\frac{1+\xi}{2}\right)\right],$$

$$\left[\frac{\mathrm{bit}}{\mathrm{frequency}\cdot\mathrm{sec}}\right] \qquad (20)$$

и описывает максимально допустимую скорость передачи информации в битах на одну посылку в единицу частотной полосы и единицу времени.

Таким образом, из (20) следует, что величина пропускной способности на одну посылку $C(T) \equiv \equiv C(\Delta kT)$ достигает своего предельного значения для пропускной способности бинарного квантового канала как для ортогональных, так и неортогональных входных состояний лишь в асимптотическом пределе бесконечного времени наблюдения (точнее, при $\Delta k \cdot T = \infty$).

Поскольку речь идет о релятивистском случае, важно понять, как выглядит выражение для пропускной способности в других инерциальных системах отсчета. Покажем теперь, что выражение для пропускной способности (20) сохраняет функциональный вид, если наблюдатель на приемном конце производит свои измерения в движущейся системе отсчета. Сами измерения в системе отсчета наблюдателя записываются так же, как и в (4)–(6), при этом под всеми величинами в (7)–(10) нужно понимать их значения в системе отсчета наблюдателя. В качестве квантового состояния, которое "видит" наблюдатель в подвижной системе отсчета, следует взять состояние, которое получается действием соответствующего унитарного оператора представления группы Пуанкаре. Общее преобразование координат в группе Пуанкаре представляет собой трансляции в пространстве-времени Минковского, и лоренцевский поворот $\hat{x}' = \hat{P}(\hat{a})\hat{L}\hat{x} = \hat{L}\hat{x} + \hat{a}$, где $\hat{P}(\hat{a})$ – оператор трансляции на вектор $\hat{a} = (a, a_0)$, $\hat{L}$ – оператор лоренцева поворота, описывающий переход в другую инерциальную систему. Данные преобразования индуцируют преобразования операторов $\hat{\mathbf{U}}(\hat{L},\hat{a})a^{+}_{\mu}(\hat{k})\hat{\mathbf{U}}^{-1}(\hat{L},\hat{a}) = e^{i\hat{L}\hat{k}\cdot\hat{a}}a^{+}_{\mu}(\hat{L}\hat{k})$, здесь $\hat{\mathbf{U}}(\hat{L},\hat{a})$ – унитарный оператор, действующий в $\mathcal{H}$. В данной одномерной схеме вектор поляризации перпендикулярен волновому вектору $k$, поэтому он не преобразуется, если наблюдатель переходит в систему отсчета, движущуюся вдоль направления распространения фотонного поля.

Преобразованное состояние, которое эффективно "видит" наблюдатель, есть (напомним, что пространственно-временные амплитуды считаем одинаковыми для разных состояний поляризации, это несущественно, и позволяет сделать выражения не столь громоздкими, как в общем случае)

$$
\begin{aligned}
&|\varphi_\mu(\hat{L},\hat{a})\rangle = \hat{\mathbf{U}}(\hat{L},\hat{a})|\varphi_\mu\rangle = \\
&= \int d\hat{x}\tilde{\varphi}(\hat{x})\hat{\mathbf{U}}(\hat{L},\hat{a})\varphi^{+}_{\mu}(\hat{x})\hat{\mathbf{U}}(\hat{L},\hat{a})^{-1}\hat{\mathbf{U}}(\hat{L},\hat{a})|0\rangle = \\
&= \int d\hat{k}\tilde{\varphi}(\hat{k})e^{i\hat{k}\hat{k}\cdot\hat{a}}\delta(\hat{k}^2)\theta(k_0)a^{+}_{\mu}(\hat{L}\hat{k})|0\rangle = \\
&= \int d\hat{k}\tilde{\varphi}(\hat{L}^{-1}\hat{k})e^{i\hat{k}\hat{a}}|\hat{k}\mu\rangle = \\
&= \int_0^\infty \frac{dk}{k}\tilde{\varphi}\left(k\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}, k\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}\right)|\hat{k}\mu\rangle,
\end{aligned}
\tag{21}
$$

где $dk/k_0$ – лоренц-инвариантный объем интегрирования, а также учтена инвариантность вакуумного вектора $\hat{\mathbf{U}}(\hat{L},\hat{a})|0\rangle = |0\rangle$. Пусть интервал в подвижной системе наблюдателя на приемном конце по его собственным часам остается прежним, как и по его собственным часам, когда он производит измерения в неподвижной системе $T_m = T$, тогда редуцированная матрица плотности будет иметь вид

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{T}[\rho^m_{\mu_l}] = (1-\varepsilon_m)|\mu_l\rangle\langle\mu_l| + \varepsilon_m|?\rangle\langle ?|, \\
&\rho^m_{\mu_l} = |\varphi_{\mu_l}(\hat{L},\hat{a})\rangle\langle\varphi_{\mu_l}(\hat{L},\hat{a})|,
\end{aligned}
\tag{22}
$$

$$
(1-\varepsilon_m)|\mu_l\rangle\langle\mu_l| = \int_{T_m}\frac{d\tau}{2\pi}\times
\tag{23}
$$

$$
\times\left(\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{dkdk'}{\sqrt{kk'}}\tilde{\varphi}\left(k\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}\right)e^{ik\tau}\sum_{i=0,1}\langle k'i|k\mu_l\rangle\right)\times
$$

$$
\times\left(\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{dkdk'}{\sqrt{kk'}}\tilde{\varphi}^*\left(k'\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}\right)e^{-ik\tau}\sum_{i=0,1}\langle k'\mu_l|ki\rangle\right),
$$

$$
\varepsilon_m|?\rangle\langle ?| = \int_{\overline{T_m}}\frac{d\tau}{2\pi}\times
\tag{24}
$$

$$
\times\left(\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{dkdk'}{\sqrt{kk'}}\tilde{\varphi}\left(k\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}\right)e^{ik\tau}\sum_{i=0,1}\langle k'i|k\mu_l\rangle\right)\times
$$

$$
\times\left(\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{dkdk'}{\sqrt{kk'}}\tilde{\varphi}^*\left(k'\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}\right)e^{-ik'\tau}\sum_{i=01,1}\langle k'\mu_l|ki\rangle\right).
$$

Дальнейшая задача сводится к нахождению максимума величины $\varepsilon_m$. Имеем

$$
\begin{aligned}
&\varepsilon_m = \int_{T_m}\frac{d\tau}{2\pi}\,|\int_{\Delta k_m}\frac{dk}{\sqrt{k}}\tilde{\varphi}(k)e^{ik\tau}\,|^2, \\
&T_m = T\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}, \quad \Delta k_m = \Delta k\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}.
\end{aligned}
\tag{25}
$$

Поскольку собственные числа интегрального уравнения (18) и, соответственно, оптимальная форма амплитуды зависят лишь от произведения $\Delta k \cdot T$, то в подвижной системе отсчета величина пропускной способности сохраняет свой функциональный вид и зависит от $\Delta k\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} \cdot T_m\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} = \Delta k \cdot T$. То есть измерения в подвижной системе отсчета оставляют пропускную способность прежней. Данный результат интуитивно понятен, поскольку переход в движущуюся систему отсчета, по сути, из-за эффекта Доплера приводит к эффективному сжатию частотного спектра состояния $\Delta k \to \Delta k\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}$ (если наблюдатель движется в ту же сторону, что и состояние) и, соответственно, к эффективному пространственному растяжению состояния. Последнее обстоятельство требует большего времени $T \to T\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}$, чтобы обеспечить ту же долю состояния во временном окне. Но поскольку ответ зависит лишь от произведения $\Delta k \cdot T$, то результат остается неизменным и также не зависит от направления движения наблюдателя (знака $\beta = v/c$). Этот результат можно пояснить следующим образом. Поскольку величина скалярного произведения $\hat{k}\cdot\hat{x}$ является лоренц-инвариантом, а для фотона, распространяющегося в одном направлении $k = k_0$, и пространственно-временные переменные входят лишь в комбинации $\tau = x - t$, то величина $k\cdot\tau$, от которой зависит ответ, также будет лоренц-инвариантом.

Приведем в заключение выражение для пропускной способности для случая, когда классическому алфавиту сопоставляются матрицы плотности общего вида. Информация по-прежнему кодируется в различные состояния поляризации. Пусть классический алфавит состоит из $N$ символов, которым сопоставляются матрицы плотности однофотонных состояний $\rho_l$, выбираемые с вероятностями $p_l$ $(l = 1...N)$. Общий вид матрицы плотности в базисе обобщенных собственных векторов $|ki\rangle$ $(i = 0,1)$ имеет вид

$$\hat{\rho}^{(l)} = \begin{pmatrix} \rho_{11}^{(l)}(k,k') & \rho_{12}^{(l)}(k,k') \\ \rho_{21}^{(l)}(k,k') & \rho_{22}^{(l)}(k,k') \end{pmatrix}. \tag{26}$$

Измерения в конечном временном окне приводят к редуцированной матрице плотности, содержащей только поляризационные степени свободы. Имеем

$$\hat{\rho}_e^{(l)} = \mathrm{Tr}\{\mathcal{M}(\tau\in T)\hat{\rho}^{(l)}\} + \mathrm{Tr}\{\mathcal{M}(\tau\notin T)\hat{\rho}^{(l)}\} =$$

$$= \begin{pmatrix} \rho_{11}^{(l)}(T) & \rho_{12}^{(l)}(T) \\ \rho_{21}^{(l)}(T) & \rho_{22}^{(l)}(T) \end{pmatrix} \bigoplus \begin{pmatrix} \rho_{11}^{(l)}(\overline{T}) & \rho_{12}^{(l)}(\overline{T}) \\ \rho_{21}^{(l)}(\overline{T}) & \rho_{22}^{(l)}(\overline{T}) \end{pmatrix}, \tag{27}$$

$$\rho_{ij}^{(l)}(T) = \int_T \frac{d\tau}{2\pi}\left(\int_0^\infty\int_0^\infty dk dk' e^{ik\tau}\rho_{ij}^{(l)}(k,k')e^{-ik'\tau}\right), \quad i,j = 1,2, \tag{28}$$

аналогично для $\rho_{ij}^{(l)}(\overline{T})$. Блок матрицы плотности с $\tau\notin T$ в (27) отвечает в дальнейшем за исходы вне временного окна наблюдения, поэтому, как и выше, можно формально ввести состояние $|?\rangle$ ортогональное любому состоянию поляризации, и оставить только диагональные члены в матрице (27) для сохранения общего единичного следа матрицы плотности. Имеем в базисе $|e_0\rangle$, $|e_1\rangle$, $|?\rangle$

$$\hat{\rho} = \sum_{l=1}^{N} p_l\hat{\rho}_e^{(l)},$$

$$\hat{\rho}_e^{(l)} = \begin{pmatrix} \rho_{11}^{(l)}(T) & \rho_{12}^{(l)}(T) & 0 \\ \rho_{13}^{(l)}(T) & \rho_{22}^{(l)}(T) & 0 \\ 0 & 0 & \rho_{11}^{(l)}(T)+\rho_{22}^{(l)}(T) \end{pmatrix}. \tag{29}$$

Выражение для пропускной способности вычисляется после этого по формуле (14) [3–6].

Отметим, что формула (20) описывает максимальную (оптимальную) скорость передачи классической информации при заданных полосе пропускания $(\Delta k)$ и временном окне $(T)$. Данное выражение не зависит от исходного разбиения частотной полосы на $n$ параллельных каналов, поскольку уменьшение полосы каждого канала $\Delta k/n$ будет приводить к увеличению времени наблюдения в $nT$, так что произведение для *оптимальной* формы состояния не зависит от $n$, а зависит лишь от произведения полной полосы пропускания и времени наблюдения (скорости передачи) $(\Delta k/n)\cdot nT = \Delta k\cdot T$.

Таким образом, явное введение в задачу о кодировании пространства-времени позволяет получить пропускную способность квантового канала связи в реальном времени и проясняет смысл выражения для пропускной способности, полученной лишь при учете свойств пространства состояний, как асимптотической величины.

Выражаю благодарность С. С. Назину и А. С. Холево за полезные обсуждения и критические замечания. Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (проект # 02-02-16289), а также проектами # 40.020.1.1.1170 и # 37.029.1.1.0031.

---

1. C. E. Shannon, Bell Syst. Tech. Jour. **27**, 397, 623 (1948).
2. Р. Галлагер, *Теория информации и надежная связь*, М.: Советское радио, 1974.
3. А. С. Холево, Проблемы передачи информации **8**, 63 (1972); **15**, 3 (1979); Успехи мат. наук **53**, 193 (1998); *Введение в квантовую теорию информации*, серия *Современная математическая физика*, вып.5, МЦНМО, Москва, 2002.
4. R. Jozsa and B. Schumacher, J. Mod. Optics. **41**, 2343 (1994).
5. P. Hausladen, R. Jozsa, B. Schumacher et al., Phys. Rev. **A54**, 1869 (1996).
6. B. Schumacher and M. D. Westmoreland, Phys. Rev. **A 56**, 131 (1997).
7. Н. Н. Боголюбов, А. А. Логунов, И. Т. Тодоров, *Основы аксиоматического подхода в квантовой теории поля*, М.: Наука, 1969; Н. Н. Боголюбов, А. А. Логунов, А. И. Оксак, И. Т. Тодоров, *Общие принципы квантовой теории поля*, М.: Наука, 1987.
8. D. Slepian and H. O. Pollak, Bell Syst. Techn. J. **XL**, 40 (1961).
9. W. H. Fuchs, J. of Mathem. Anal. and Appl. **9**, 317 (1964).