Письма в ЖЭТФ, том 45, вып. 8, стр. 365 – 367 *25 апреля 1987 г.*

КВАНТОВАНИЕ КАЛИБРОВОЧНЫХ ТЕОРИЙ С НИЛЬПОТЕНТНЫМИ ГЕНЕРАТОРАМИ

Р.Э.Каллош

Показано, что проблема ковариантного первичного квантования суперчастицы и суперструны связана с нильпотентностью калибровочных генераторов гостов первого поколения. Проведено корректное квантование таких теорий, содержащее кроме обычного произвола в выборе калибровки еще и произвол в выборе числа поколений гостов.

Как известно, ковариантное действие суперструны Грина – Шварца [1] удавалось проквантовать только в *одной* калибровке светового конуса с нарушением глобальной по мировому листу лоренц-инвариантности и суперсимметрии. Мы выясним причины столь необычного для калибровочной теории положения и найдем способ квантования теорий типа теории суперструны в произвольной калибровке.

Классическое действие $\mathcal{S}(\varphi)$ калибровочной теории инвариантно относительно калибровочных преобразований $\delta\varphi^i = R^i_{\mu 1}\,\zeta^{\mu 1}$. Если векторы $R^i_{\mu_1}$ являются линейно независимыми в стационарной точке $\mathcal{S}_{,i}[\varphi_0] = 0$, то теория описывается одним поколением гостов. Если генераторы $R^i{}_{\mu_1}$ имеют нуль-вектор,

$$R^i{}_{\mu_1}\; Z^{\mu_1}{}_{1\,\mu_2}\Big|_{\varphi_0} = 0, \qquad (1)$$

то госты первого поколения становятся калибровочными полями, и появляются госты второго поколения. Если у Z_1 в свою очередь имеется нуль-вектор, $Z_1{}^{\mu_1}{}_{\mu_2}\, Z_2{}^{\mu_2}{}_{\mu_3} = 0$, то госты второго поколения становятся калибровочными и появляются госты третьего поколения, и т. д. Известно как в общем случае незамкнутой алгебры квантовать теорию с *конечным* числом поколений, в которой госты последнего поколения уже не калибровочные поля [2].

Однако и действие суперчастицы [3], и действие суперструны [1,4] не относятся к описанной выше категории. В них исходные генераторы имеют нуль-вектор $Z^{\mu_1}{}_{\mu_2}$, который является нильпотентным в стационарной точке,

$$Z^2\,|_{\varphi_0} = 0. \qquad (2)$$

Это означает, что госты любого поколения являются калибровочными полями, а для теорий с бесконечным числом гостов для гостов рецепт квантования не был известен. Для построения процедуры квантования таких теорий мы воспользуемся конкретными свойствами генераторов R и Z, характерными для теорий суперчастиц и суперструн [1,3,4]:

А) Нуль-вектор $Z^{\mu_1}{}_{\mu_2}$ нетривиален только для части μ_1 [1)].

---

1) В дальнейшем будем обозначать ее α, имея в виду локальную суперсимметрию $Z^{\alpha\beta} = \gamma^k p^k$; госты репараметризации – не калибровочные.

Соответствующая часть генераторов калибровочной симметрии R^i_α не содержит дифференциальных операторов.

Б) Нильпотентный оператор Z не содержит дифференциальных операторов.

Мы возьмем за основу конструкцию Баталина – Вилковыского [2], развитую ими для теории конечного числа поколений. Функциональный интеграл для калибровочного действия $\mathcal{S}(\varphi)$ строится следующим образом (с точностью до локальной меры интегрирования):

$$\mathcal{Z} = \int \exp \frac{i}{\hbar} S(z)\, \delta(\chi_A(z)) J^{1/2} \prod_{\mathcal{A}} dz^{\mathcal{A}} , \tag{3}$$

где $z^{\mathcal{A}} = (\Phi^A,\ \Phi^*_A)$, $A = 1, \dots, N$; $\mathcal{A} = 1, \dots, 2N$. Поля Φ^A включают минимальный набор классических полей φ и гостов m-поколений C_s, $s = 1, \dots, m$, а также набор s-полей для каждого госта той же статистики – антигост $\overline{C}_s$ и $(s-1)$ экстрагостов $C^{(1)}_s, \dots, C^{(s-1)}_s$. Кроме того, для каждого $\overline{C}_s$, $C^{(1)}_s, \dots$ добавляются поля π_s, $\pi^{(1)}_s, \dots, \pi^{(s-1)}_s$ противоположной статистики, поля Наканиши – Латрупа (НЛ-поля). Далее, каждому полю Φ^A ставится в соответствие антиполе Φ^*_A. Величины $S(z)$ и $\chi_A(z)$ в (3) удовлетворяют уравнениям

$$(S,\ S) = 0, \tag{4}$$

$$(\chi_A, \chi_B) = 0, \tag{5}$$

где антискобка определена следующим образом:

$$(X, Y) = \frac{\partial_r X}{\partial z^{\mathcal{A}}} \mathcal{E}^{\mathcal{A}\mathcal{B}} \frac{\partial_e Y}{\partial z^{\mathcal{B}}} = \frac{\partial_r X}{\partial \Phi^A} \frac{\partial_e Y}{\partial \Phi^*_A} - \frac{\partial_r X}{\partial \Phi^*_A} \frac{\partial_e Y}{\partial \Phi^A} . \tag{6}$$

Можно выбрать S и χ_A в виде

$$S(\Phi, \Phi^*) = \mathcal{S}(\varphi) + \sum_{n=1} \Phi^*_{A_n} \dots \Phi^*_{A_1} S^{A_1 \dots A_n}(\Phi), \tag{7}$$

$$\chi_A = \Phi^*_A - \frac{\partial \Psi}{\partial \Phi} , \tag{8}$$

тогда уравнение (4) определяет коэффициенты $S^{A_1 \dots A_n}$ в (8), а (5) удовлетворяется автоматически; при этом детерминант канонического преобразования $J^{1/2}$ равен единице.

Как следует из (3), максимальный произвол в квантовании калибровочной теории с m поколениями гостов состоит, во-первых, в возможности канонической замены переменных Φ, Φ^* и, во-вторых, в выборе функции Ψ в (8), определяющей выбор калибровочного условия.

Мы покажем, что теории суперчастиц и суперструн [1, 3, 4] могут быть корректно описаны функциональным интегралом типа (3), в котором, однако, количество полей $z^{\mathcal{A}}$, т. е. число поколений гостов, является в такой же мере произвольным, как и выбор калибровочной функции.

Предлагаемая процедура квантования теорий (1), (2), А), Б), состоит в том, что функциональный интеграл (3) строится как указано выше, а на госты m-го поколения накладывается произвольное *алгебраическое* условие типа[2)]

$$\sigma^a{}_\alpha C^\alpha{}_m = 0, \qquad C_m{}^\alpha = \tilde{\sigma}^\alpha{}_a C_m{}^a , \qquad \sigma^a{}_\alpha \tilde{\sigma}^{\alpha b} = 0 , \tag{9}$$

Условия (9) означают, что госты m-го поколения уже не являются калибровочными полями, т. е. теория сведена к теории с *произвольным,* но конечным числом поколений [2]. Мы покажем, что 1) теория не зависит от числа поколений гостов и от способа обрыва, т. е. от величин $\sigma^a{}_\alpha$, и 2) теория эквивалентна теории квантованной в унитарной калибровке.

---

2) В случае суперчастицы и суперструны $\alpha = 1, \dots, 16$; $a = 1, \dots, 8$.

Унитарная калибровка получается если условие (9) накладывается на госты первого поколения. Тогда квантование в соответствии с указанными правилами означает, что в квантовом действии появляются члены

$$\chi^a(\varphi^i)\pi_a + C_a \frac{\partial \chi^a}{\partial \varphi^i} R^i{}_\alpha \widetilde{\sigma}^\alpha{}_b C^b . \tag{10}$$

Если калибровочная функция $\partial\chi^a / \partial\varphi^i$ не содержит дифференциальных операторов (а $R^i{}_\alpha$ их не содержит по условию А), то очевидно, что введение гостов излишне, так как интегрирование по ним приводит только к изменению локальной меры интегрирования $\sim \delta^n(0)$ ($n = 2$ для струны). В этом случае получаем унитарную калибровку. Зависимость от $\widetilde{\sigma}^\alpha{}_b$ также выпадает. Если же $\partial\chi^a / \partial\varphi^i$ содержит дифференциальные операторы, то уже госты первого поколения в (10) "оживают", получают кинетические члены [3].

Покажем, что предлагаемое квантование теории с m-поколениями эквивалентно квантованию с $m - 1$ поколением гостов. Условия А), Б) и специальный выбор функции Ψ_m в (8) позволяют провести функциональное интегрирование по всем полям m-го поколения. При этом интегрирование по $\bar{C}_m$, C_m дает ответ пропорциональный $\delta^n(0)$. Интегрирование по m НЛ-полям $\pi_m, \pi_m^{(1)}, \ldots, \pi_m^{(m-1)}$ приводит к ограничениям на m полей гостов, антигостов и экстрагостов $(m-1)$-го поколения, т. е. на $C_{m-1}, \bar{C}_{m-1}, C_{m-1}^{(1)}, \ldots, C_{m-1}^{(m-2)}$. Наконец, интегрирование по $(m-1)$ экстрагостам m-го поколения $C_m^{(1)}, \ldots, C_m^{(m-1)}$ дает нужные ограничения на $(m-1)$ НЛ полей $(m-1)$-го поколения. Таким образом, с точностью до локальной меры интегрирования, мы приходим к правильному описанию теории, как теории с $m-1$ поколением, в которой все калибровочные условия за исключением $\zeta^a{}_\alpha C^\alpha_{m-1}$ легко меняются стандартным способом изменением функции Ψ_{m-1}, зависимость же от способа "обрыва хвоста", т. е. от $\sigma^a{}_\alpha$, как уже указывалось, входит только в члены с $\delta^n(0)$.

Проиллюстрируем указанный механизм для перехода $m = 3 \to m = 2$, т. е. рассмотрим (9) для $m = 3$. Выберем калибровочную функцию в виде $\Psi_3 = \Psi_1 + \bar{C}_{3a}\omega^a{}_\alpha C_1^\alpha + \bar{C}_{2\alpha}\eta^\alpha{}_a C_3^{(1)a} + \bar{C}_{3\,a}^{(2)}\zeta^a{}_\alpha C_2^{(1)\alpha}$, Ψ_2 содержит только госты первого и второго поколения, ω, η, ζ не содержат дифференциальных операторов. Интегрирование по $\pi_{3a}, \pi_3^{(1)a}, \pi_{3\,a}^{(2)}$ дает $\omega^a{}_\alpha C_2{}^\alpha = \bar{C}_{2\alpha}\eta^\alpha{}_a = \zeta^a{}_\alpha C_2^{(1)\alpha} = 0$, а по $C_3^{(1)a}$, $C_3^{(2)a}$, соответственно, $\zeta^a{}_\alpha \pi_2^{(1)\alpha} = \pi_{2\alpha}\eta^\alpha{}_a = 0$, что и требуется для гостов второго поколения в случае если оно последнее. Зависимость от C_3^a, $\bar{C}_{3a}$ имеет вид $\bar{C}_{3a}\omega^a{}_\alpha Z^{\alpha\beta}\widetilde{\sigma}^\beta{}_b C_3^b$, и в силу условия Б) и нашего выбора $\omega, \widetilde{\sigma}$ интегрирование по $\bar{C}_3, C_3$ дает вклад только в локальную меру.

Таким образом, принципиально решена проблема квантования теорий с нильпотентными генераторами с указанными свойствами. Конкретная реализация предложенной схемы квантования в теориях суперчастиц и суперструн будет содержаться в отдельной публикации.

Мне приятно выразить глубокую благодарность И.А.Баталину за многократные обсуждения основ квантования.

Литература

1. *Green M.B., Schwarz J.H.* Phys. Lett., 1984, **136B**, 367.
2. *Batalin I.A., Vilkovisky G.A.* Phys. Rev., 1983, **D28**, 2567.
3. *Brink L., Schwarz J.H.* Phys. Lett., 1981, **100B**, 310; *Siegel W.* Class. Quantum Grav., 1985, **2**, L95.
4. *Siegel W.* Nucl. Phys., 1985, **B263**, 93; *Romans L.J.* Nucl. Phys., 1987, **B281**, 639.

Физический институт им. П.Н.Лебедева
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
26 февраля 1987 г.

[3] В теориях [1, 3, 4] χ^a может быть соответственно $(\gamma^0 + \gamma^9)\theta$ или $(\gamma^0 + \gamma^9)(\partial_\tau + \partial_\sigma)\theta$; во втором случае сохраняется глобальная суперсимметрия.