

## УНИВЕРСАЛЬНОСТЬ ГЕЛИЯ

*А.М.Дюгаев*

Для температур  $T > 3$  К термодинамические функции жидкого гелия имеют универсальную зависимость от приведенной температуры  $\tau = T/\bar{K}^0$ . Зависимость энергии нулевых колебаний  $\bar{K}^0$  от плотности жидкости и массы атома определена на основе экспериментальных данных при комнатной температуре.

В работах <sup>1-3</sup> показано, что для жидких  $\text{He}^3$  и  $\text{He}^4$  существует широкий круг квантовых явлений, нечувствительных к типу статистики частиц. Критерии квантовости и вырожденности конденсированной среды противоречат друг другу: чем более среда квантовая, тем менее она вырожденная. Это связано с тем, что для плотной жидкости даже при  $T = 0$  длина

волны атома меньше, чем среднее межатомное расстояние  $a$ . Характерным квантовым масштабом жидкости является энергия ее нулевых колебаний  $\bar{K}^0$ , т. е. значение средней кинетической энергии атома  $\bar{K}$  при  $T=0$

$$\bar{K}(n, T) = \bar{K}^0 K^*(n, \tau), \quad \tau = T/\bar{K}^0, \quad \bar{K}^0 = \bar{K}(n, 0). \quad (1)$$

Так как основная зависимость  $\bar{K}$  от плотности  $n$  выделена в качестве масштабного множителя  $\bar{K}^0$ , приведенная кинетическая энергия  $K^*$  существенно зависит от приведенной температуры  $\tau$  и очень слабо от  $n$ . Иначе говоря,  $K^*$  является универсальной однопараметрической функцией  $\tau$ , одинаковой с точностью до малых обменных эффектов для всех квантовых жидкостей. Это влечет за собой универсальность термодинамики и кинетики гелия на огромном интервале  $3 < T < 10^3$  К и давлений  $P < 10^4$  бар. Экспериментальные данные разных работ для  $\text{He}^3$  и  $\text{He}^4$  связаны преобразованием масштаба  $T$  и  $n$ . На опыте, фактически, измеряются приведенные теплоемкость  $C^*$ , энтропия  $S^*$  и свободная энергия  $F^*$

$$C^* = \frac{\partial \bar{K}}{\partial \tau} = \tau \frac{\partial S^*}{\partial \tau}, \quad F^* = K^* - \tau S^*. \quad (2)$$

Чтобы связать приведенные параметры с наблюдаемыми, удобно в качестве термодинамической переменной выбрать не  $T$ , а параметр  $\bar{K}$ , который имеет смысл эффективной температуры жидкости, т. е. является ее естественной характеристикой. Температура же  $T$  характеризует не жидкость, а классический термостат, сосуд в который она налита. Такой выбор оправдан тем, что в разложении полной энергии одного атома  $\bar{E}$  по степеням  $\bar{K}$  можно ограничиться двумя членами.

$$\bar{E}(n, T) = (1 + \nu) \bar{K}(n, T) + E^0, \quad \nu = \nu(n), \quad E^0 = E^0(n). \quad (3)$$

Для всех конденсированных сред есть область применимости соотношения (3). Специфика среды проявляется в значении параметра  $\nu$ . Для простых кристаллов  $1 - \nu \ll 1$ ; для системы твердых шаров  $\nu = 0$ ; для квантовых жидкостей  $\nu \ll 1$ . Такое разделение устанавливается по зависимости  $\bar{K}$  от массы атома  $m$ <sup>4</sup>.

$$\bar{F} = \bar{E} - T\bar{S} = (1 + \nu) \bar{K}^0 F^*(\tau) + E^0, \quad \bar{K} = - \frac{\partial \bar{F}}{\partial m} m. \quad (4)$$

Из (3, 4) следует степенная зависимость  $\bar{K}^0$  от  $m$ :  $\bar{K}^0 \propto m^{-1/(1+\nu)}$ . Поэтому параметры  $\bar{K}_3, \bar{K}_4$  для жидких  $\text{He}^3$  и  $\text{He}^4$  связаны соотношениями:

$$\bar{K}_4^0 = \bar{K}_3^0 \lambda, \quad \lambda = \left( \frac{m_3}{m_4} \right)^{1/(1+\nu)}, \quad \bar{K}_3(n, T) = \frac{1}{\lambda} \bar{K}_4(n, \lambda T). \quad (5)$$

В твердошаровом приближении  $\nu = 0$  связи (5) установлены в<sup>3</sup>. Приближение  $\nu = 1$ , т. е.  $\lambda = \sqrt{m_3/m_4}$  отвечает истинно дебаевскому аморфному твердому телу, каковым гелий не является. Даже для твердых  $\text{He}^3$  и  $\text{He}^4$  параметр  $\nu$  заметно отличен от 1<sup>5</sup>. Выписанных соотношений достаточно, чтобы связать теплоемкости  $\bar{C}_3, \bar{C}_4$ , энтропии  $\bar{S}_3, \bar{S}_4$  и энергии  $\bar{E}_3, \bar{E}_4$  жидких  $\text{He}^3$  и  $\text{He}^4$ , а на основе сравнения с опытом определить функции  $K^*, S^*, C^*$ .  $\bar{C}_3(n, T) = \bar{C}_4(n, \lambda T), \bar{C}(n, T) = (1 + \nu)C^*(\tau)$

$$\bar{S}_3(n, T) = S_4(n, \lambda T) + \ln 2, \quad \bar{S}(n, T) = (1 + \nu)S^*(\tau) + \ln g_{F, B} \quad (6)$$

$$\bar{E}_3(n, T) = \frac{1}{\lambda} \bar{E}_4(n, \lambda T) + E^0 \left( 1 - \frac{1}{\lambda} \right), \quad g_F = 2, \quad g_B = 1.$$

Из энтропии  $\text{He}^3$  выделен спиновый вклад  $\ln 2$ . Зависимость  $\nu, E^0, \bar{K}^0$  от  $n$  определяется

по асимптотикам  $\bar{C}_4, \bar{S}_4, \bar{E}_4$  и уравнению состояния  $P_4(n, T)$  при высоких  $T$ :  $P_4 = c_1 T + c_2 - c_3 T \ln T - c_4 \ln T$

$$\bar{C}_4 = (1 + \nu) \left( \frac{3}{2} - \frac{T_c}{T} \right), \quad \bar{S}_4 = (1 + \nu) \left( \frac{3}{2} \ln \frac{T}{T_s} + \frac{T_c}{T} \right), \quad \bar{E}_4 = E^\infty + (1 + \nu) \left( \frac{3}{2} T - T_c \ln T \right). \quad (7)$$

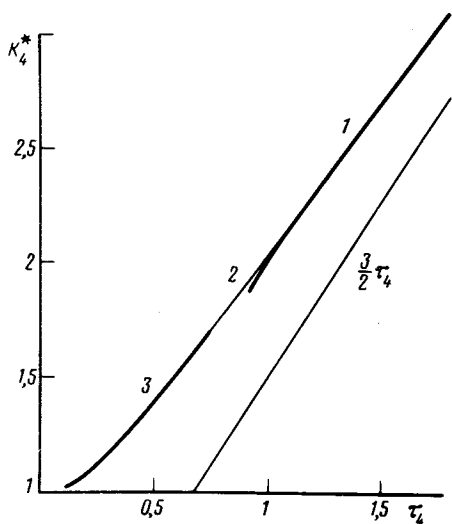


Рис. 1

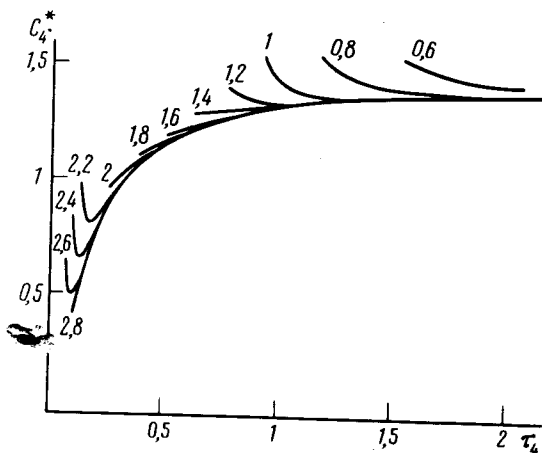


Рис. 2

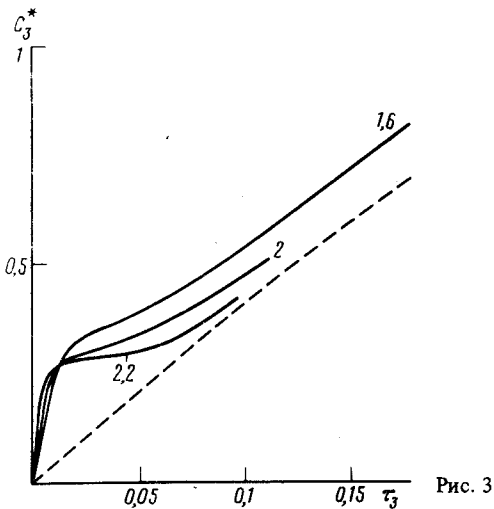


Рис. 3

Функции плотности  $c_i$  выражаются через производные  $\nu, T_c, T_s, E^\infty$  по  $n$ . Для малой плотности  $n$  разложения (7) можно получить прямым вычислением вириальных коэффициентов с потенциалом  $\exp - \epsilon$ . Сравнение (7) с данными работ <sup>5-8</sup> показало, что с точностью в 1% они согласуются с опытом для  $10 < T < 420$  К,  $P < 10^4$  бар и молярных объемов  $V > > 15$  см<sup>3</sup>/моль. Так как параметры  $c_1$  и  $c_3$  в (7) не зависят от массы атома  $m$ , для определения уравнения состояния жидкого He<sup>3</sup> в широком интервале  $n, T$  достаточно определить лишь две функции плотности  $c_2$  и  $c_4$  в любой удобной для экспериментатора области  $T > > 10$  К. Сравнение (6, 7) определяет асимптотики  $K^*, C^*, S^*$  при  $\tau > 1$ .

$$K^* = \frac{3}{2} \tau + \tau_0 - \tau_c \ln \tau, \quad C^* = \frac{3}{2} - \frac{\tau_c}{\tau}, \quad \tau_c = \frac{T_c}{K^0}, \quad \tau_s = \frac{3}{2} \ln \frac{\bar{K}^0}{T_s}$$

$$S^* = \frac{3}{2} \ln \tau + \tau_s + \frac{\tau_c}{\tau}. \quad (8)$$

Низкотемпературная же асимптотика  $\tau < 1$  этих величин характерна для всех несверхтекучих и нетвердых сред.

$$K^* = 1 + \Delta_1 \tau^2 - \Delta_2 \tau^4, \quad C^* = 2\Delta_1 \tau - 4\Delta_2 \tau^3, \quad S^* = 2\Delta_1 \tau - \frac{4}{3} \Delta_2 \tau^3 + S_0. \quad (9)$$

С точностью до малых эффектов статистики частиц при  $T_{F, \lambda} < T < \bar{K}^0$  разложение теплоемкости по степеням  $T$  начинается с члена  $\propto T$ , который ничем не запрещен. Малая остаточная энтропия  $S_0 \sim 0,1$  быстро вымерзает с ростом плотности  $\text{He}^4$ . Графики зависимости  $K_4^*, C_4^*$  от  $\tau_4 = T/\bar{K}_4^0$ , построенные по данным работ 6, 9 для  $T_\lambda < T < 20$  К, приведены на рис. 1, 2. Цифры у кривых — значение приведенной плотности  $\rho_4 = n_4/n_k$ , где  $n_k = 0,01035 \text{ \AA}^{-3}$  — критическая плотность перехода жидкость — пар для  $\text{He}^4$ . Этому значению  $n_k$  соответствует  $V_k = 58,18 \text{ см}^3/\text{моль}$ . С ростом  $n$  и  $T$  все кривые  $C_4^*$  приближаются к одной "квантовой" огибающей (8, 9). Отклонения от нее связаны с критическими флуктуациями вблизи  $T_\lambda$  и на линии расслоения жидкость — пар. Для зависимости же  $K^*$  от  $\tau$  эти отклонения ничтожно малы. Поэтому  $K^*$  можно продолжить в закритическую область  $T$ , где жидкий гелий метастабилен. На рис. 3 приведены зависимости  $C_3^*$  от  $\tau_3 = T/\bar{K}_3^0$  для  $\text{He}^3$  при  $T < 2,5$  К, построенные по данным работы 10. Цифры у кривых — значение параметра  $\rho_3 = n_3/n_k$ . Картина та же: с ростом  $T$  и  $n_3$  обменные эффекты исчезают, и все кривые приближаются к той же универсальной кривой (9), обозначенной пунктиром. Приведем численные значения параметров гелия:

$$\begin{aligned} \tau_0 &= 0,52, \quad \tau_s = 2,56, \quad \Delta_1 = 2,12, \quad \Delta_2 = 3,16, \\ \tau_c &= 0,15 \div 0,22, \quad \nu = 0,039\rho + 0,008\rho^2, \quad -E^0 = (7,83\rho + 1,37\rho^2)\text{К} \\ \bar{K}_4^0 &= 3,76\rho^{2/3}(1 + 0,41\rho + 0,097\rho^2)\text{К} \quad \text{при } \rho < 1,6 \end{aligned} \quad (10)$$

$$\bar{K}_4^0 = 8,266 \left( \frac{a}{a_c} - 1 \right)^{-2} \text{К} \quad \text{при } \rho > 1,6, \quad \frac{a_c}{a} = \frac{\rho^{1/3}}{\rho_c^{1/3}}, \quad \rho_c = 11,3, \quad a_c = 2,045 \text{ \AA}.$$

Эти зависимости получены на основе анализа данных работы 6 для  $T < 20$  К,  $P < 100$  бар,  $\rho < 3$ . Только малый параметр  $\tau_c$  оказался неуниверсальным: при изменении плотности  $n_4$  в 15 раз он меняется на 50%. Таким образом, данных 6 достаточно, чтобы рассчитать характеристики  $\text{He}^3$  и  $\text{He}^4$  по приведенным выше формулам вплоть до  $T \sim 10^3$  К и  $P \sim 10^4$  бар. Если не принимать во внимание чисто авторское любопытство, экспериментальное изучение области  $T > 3$  К и  $V > 15 \text{ см}^3/\text{моль}$  для  $\text{He}^3$  является физически неинформативным. С точностью в 1–3% все параметры  $\text{He}^3$  могут быть рассчитаны. Интерес представляет область низких  $T < 100$  К и малых  $V < 10 \text{ см}^3/\text{моль}$  как для  $\text{He}^3$ , так и для  $\text{He}^4$ , где полюсная зависимость  $\bar{K}^0$  от  $a$  (10) должна смениться на экспоненциальную, характерную для твердого гелия:  $\bar{K}^0 \propto \exp \gamma(\tilde{a}_c - a)$ . Функциональная же зависимость  $K^*, S^*, C^*$  от  $\tau$ , по-видимому, не должна сильно измениться.

Выражаю благодарность А.И.Ларкину за обсуждение работы.

#### Литература

1. Дюгаев А.М. ЖЭТФ, 1984, 87, 1232.
2. Дюгаев А.М. ЖЭТФ, 1985, 89, 1220.
3. Дюгаев А.М. Письма в ЖЭТФ, 1985, 42, 442.
4. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Статистическая физика, часть 1, М.: Наука, 1976, 67.
5. Dugdale J.S., Franck J.P. Phil. Roy Soc. London, 1964, 257A, 1.
6. Hill R.W., Lounasmaa O.V. Phil. Trans., 1960, 252 A, 357.
7. Mills R.L., Liebenberg D.H., Bronson J.C. Phys. Rev. B, 1980, 21, 5137.

8. Циклис Д.С., Масленникова В.Я., Глывка С.Я. ДАН, 1974, 216, 769.

9. Loupasmaa O.V. Cryogenics, 1961, 1, 212.

10. Greywall D.S. Phys. Rev. B, 1983, 27, 2747.

Институт теоретической физики им. Л.Д.Ландау

Академии наук СССР

Поступила в редакцию

2 апреля 1987 г.