Письма в ЖЭТФ, том 45, вып. 10, стр. 455 – 457 *25 мая 1987 г.*

О ФИЗИЧЕСКОЙ ИНТЕРПРЕТАЦИИ РЕШЕНИЙ ТЕОРИИ СПОНТАННОЙ КОМПАКТИФИКАЦИИ

И.П.Волобуев, Ю.А.Кубышин

Предложена физическая интерпретация решений теории спонтанной компактификации, основанная на методе размерной редукции.

В настоящей статье мы проследим связь размерной редукции [1] со спонтанной компактификацией [2-4]. При этом мы воспользуемся результатами работ [5], в которых исследовались калибровочные теории в многомерных пространствах вида $M = M^4 \times G/H$ (M^4 – пространство Минковского), симметричные относительно канонического действия G на G/H. В них было показано, что в случае, когда G/H – симметрическое пространство, редуцированная теория в M^4 содержит один неприводимый мультиплет скалярных полей с потенциалом Хиггса, приводящим к спонтанному нарушению симметрии. Здесь мы покажем, что многомерные полевые конфигурации, отвечающие хиггсовскому вакууму редуцированной теории, удовлетворяют многомерным уравнениям Эйнштейна – Янга – Миллса и приводят к спонтанной компактификации.

Возьмем стандартное действие с Λ-членом для гравитационного поля g_{MN} ($M = (\mu, m)$, $N = (\nu, n)$; $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$, $m, n = 1, 2, \dots d$), взаимодействующего с калибровочным полем A_M в $(4+d)$-мерном пространстве M. Вариация этого действия по g_{MN} и A_M дает многомерные уравнения Эйнштейна – Янга – Миллса. Как обычно в теории спонтанной компактификации, будем искать решения этих уравнений, отвечающие факторизации пространства M, $M = M^4 \times G/H$, с метрикой вида $g = \eta \oplus \gamma$ ($\eta_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(-1, 1, 1, 1)$ – метрика Минковского, а γ – G-инвариантная метрика на G/H) в предположении $A_\mu = 0$, $A_m = A_m(\xi)$, где $\xi = \{\xi^m\}$ – координаты на d-мерном пространстве G/H. В результате получим уравнения спонтанной компактификации [2-4]:

$$R_{mn} = -\frac{4\pi G}{g^2}\,\mathrm{Tr}\,(F_{ml}F_n^{\ l}); \tag{1а}$$

$$\nabla_m F^{mn} + [A_m, F^{mn}] = \partial_m F^{mn} + \Gamma^l_{ml} F^{mn} + [A_m, F^{mn}] = 0. \tag{1б}$$

В дальнейшем мы будем обсуждать решения уравнений (1б) в случае симметрического пространства G/H; справедливость уравнений Эйнштейна (1а) в этом случае следует из единственности, с точностью до постоянного множителя, G-инвариантной метрики γ на G/H и проверяется просто [2-4].

Пусть калибровочная группа поля A_M, K и группа симметрии G – компактные простые классические группы Ли. Обозначим через $\mathcal{K}$, $\mathcal{G}$ и $\mathcal{H}$ алгебры Ли групп K, G и H, причем $\mathcal{G} = \mathcal{H} \oplus \mathcal{M}$ – ортогональное разложение относительно канонического G-инвариантного скалярного произведения $\langle\,,\rangle$ в $\mathcal{G}$. Выберем в $\mathcal{G}$ базис $\{a_{\hat\alpha}\}$ так, что $\langle a_{\hat\alpha}, a_{\hat\beta}\rangle = -\delta_{\hat\alpha\hat\beta}$, $a_{\hat\alpha} = \{a_{\bar\alpha}, a_\alpha\}$ где $a_{\bar\alpha} \in \mathcal{H}$ ($\bar\alpha = 1, 2, \dots \dim H$), а $a_\alpha \in \mathcal{M}$ ($\alpha = 1, 2, \dots$

$d = \dim G/H$). В работах [1] было показано, что G – симметричное поле A_M на M определяет гомоморфизм $\tau : H \to K$ (и соответствующий гомоморфизм алгебр Ли $\tau : \mathfrak{h} \to \mathcal{K}$) и описывается парой полей $(A_\mu(x),\ \phi(x))$ на M^4, где $A_\mu(x)$ – калибровочное поле с определенной калибровочной группой $C \subset K$, $\phi(x)$ – линейное отображение $\phi(x): \mathfrak{m} \to \mathcal{K}$, обладающее свойством

$$[\tau(a),\ \phi(x)(b)] = \phi(x)([a, b]), \qquad a \in \mathfrak{h}, \quad b \in \mathfrak{m} \tag{2}$$

и описывающее скалярные поля.

Кононическое действие для калибровочного поля A_M в многомерном пространстве $M = M^4 \times G/H$ после размерной редукции (интегрирования по орбите G/H) сводится к действию в M^4 для калибровочного поля $A_\mu(x)$, взаимодействующего с полем Хиггса [1, 5]:

$$S_f = \frac{1}{8g^2} \int d^4x \ \{ \mathrm{Tr}(F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}) + \sum_\alpha \mathrm{Tr}(D_\mu \phi(a_\alpha) D^\mu \phi(a_\alpha)) - \lambda(|\phi(x)|^2 - \kappa)^2 - V_0 \}, \tag{3}$$

где $|\phi(x)|^2 = -\sum_\alpha \mathrm{Tr}(\phi(x)(a_\alpha)\phi(x)(a_\alpha))$, а λ, κ и V_0 – константы, определяемые группами H, K и размером L пространства G/H. Из (3) видно, что простейшими экстремалями S_f являются следующие полевые конфигурации: $A_\mu = 0$, а ϕ не зависит от x, и либо $\phi = 0$ (неустойчивый максимум потенциала Хиггса), либо $|\phi|^2 = \kappa$ (устойчивый хиггсовский вакуум). Ясно, что эти конфигурации удовлетворяют уравнениям Янга – Миллса в пространстве $M = M^4 \times G/H$ с метрикой $g = \eta \oplus \gamma$, которые в случае $A_\mu = 0$, $\phi = \mathrm{const}$ в точности сводятся к уравнениям спонтанной компактификации (1б).

Построим теперь многомерное поле $A_m(\xi)$, отвечающее этим конфигурациям. Для этого зададим в окрестности точки [H] пространства G/H сечение σ главного расслоения $G = P(G/H, H)$ и определим стандартным образом 1-форму θ со значениями в алгебре Ли $\mathfrak{g}$

$$\theta = \sigma(\xi)^{-1} d\sigma(\xi) = \theta_{\mathfrak{h}} + \theta_{\mathfrak{m}}, \quad \theta_{\mathfrak{h}} = \theta^{\bar\alpha} a_{\bar\alpha}, \quad \theta_{\mathfrak{m}} = \theta^\alpha a_\alpha,$$

удовлетворяющую уравнению Маурера – Картана $d\theta^{\hat\alpha} = -\frac{1}{2} C^{\hat\alpha}_{\hat\beta\hat\gamma} \theta^{\hat\beta} \wedge \theta^{\hat\gamma}$, где $C^{\hat\alpha}_{\hat\beta\hat\gamma}$ – структурные константы группы G [3, 4, 6]. Для формы $\theta_{\mathfrak{m}} = \theta^\alpha_m a_\alpha d\xi^m$ введем дуальный базис векторных полей $\{\theta^m_\alpha\}$ на G/H, удовлетворяющий условиям $\theta^m_\alpha \theta^\beta_m = \delta^\beta_\alpha$, $\theta^m_\alpha \theta^\alpha_n = \delta^m_n$.

Многомерное калибровочное поле, отвечающее рассматриваемым четырехмерным конфигурациям, задается следующей 1-формой на G/H:

$$A = \tau(\theta_{\mathfrak{h}}) + \phi(\theta_{\mathfrak{m}}), \tag{4}$$

где ϕ не зависит от x и дает экстремум потенциала в (3). Эта формула является наиболее общим представлением для G симметричного калибровочного поля нужного типа (см. теорему Вана в [6], гл. X). Анзац с $\phi = 0$ использовался в большинстве известных нам работ при построении компактифицированных рещений (см., например, [2 – 4]); G – симметричное поле в общем виде (4) рассматривалось в [7]. Тензор напряженности калибровочного поля, соответствующий (4), имеет вид:

$$F_{mn} = F_{\alpha\beta} \theta^\alpha_m \theta^\beta_n, \quad F_{\alpha\beta} = [\phi(a_\alpha),\ \phi(a_\beta)] - \tau([a_\alpha, a_\beta]). \tag{5}$$

Покажем теперь, что калибровочное поле, задаваемое формой (4) и отвечающее экстремумам функционала (3), уловлетворяет не только уравнению (1б), но и более сильному условию параллелизуемости:

$$\nabla_k F_{mn} + [A_k, F_{mn}] = \partial_k F_{mn} - \Gamma^l_{km} F_{ln} - \Gamma^l_{kn} F_{ml} + [A_k, F_{mn}] = 0. \tag{6}$$

Действительно, G-инвариантная каноническая метрика на G/H задается формулой $\gamma_{mn} =$

$= L^2 \theta^\alpha_m \theta^\alpha_n$. Символы Кристофеля римановой связности при этом имеют вид

$$\Gamma^m_{nk} = \frac{1}{2}\left\{ C^\gamma_{\beta\alpha}\, \theta^m_\gamma (\theta^{\bar\beta}_k \theta^\alpha_n + \theta^{\bar\beta}_n \theta^\alpha_k) + \theta^m_\alpha \left(\frac{\partial \theta^\alpha_n}{\partial \xi^k} + \frac{\partial \theta^\alpha_k}{\partial \xi^n} \right) \right\}. \tag{7}$$

Подставляя (4), (5) и (7) в (6), учитывая условие (2) и тождество Бьянки для структурных констант группы G, получаем, что условие параллелизуемости (6) сводится к следующему условию на отображение ϕ:

$$[\phi(a_\alpha), [\phi(a_\beta), \phi(a_\gamma)]] - \phi([a_\alpha, [a_\beta, a_\gamma]]) = 0. \tag{8}$$

Используя явный вид отображения ϕ [5] можно убедиться в справедливости (8) для случая $|\phi|^2 = \kappa$; для $\phi = 0$ оно выполняется тривиально.

В заключение отметим, что результаты настоящей работы фактически представляют собой новый подход к физической интерпретации решений теории спонтанной компактификации, основанный на сопоставлении вакуумных состояний многомерной и редуцированной теорий. Оказалось, что с этой точки зрения полевые конфигурации почти всех известных ныне компактифицирующих решений уравнений Эйнштейна – Янга – Миллса (исключение составляет [7]) отвечают не хиггсовскому вакууму редуцированной теории, а неустойчивому локальному максимуму ее потенциала Хиггса. На наш взгляд, такая интерпретация решений теории спонтанной компактификации вскрывает их физический смысл и должна приниматься во внимание при любой постановке задачи в этой теории.

Литература

1. *Forgacs P., Manton N.S.* Comm. Math. Phys., 1980, **72**, 15; *Coqueraux R., Jadczyk A.* Comm. Math. Phys., 1983, **90**, 79; *Волобуев И.П., Рудольф Г.* ТМФ 1985, **62**, 388.
2. *Cremmer E., Scherk I.* Nucl. Phys., 1977, **B118**, 61; *Luciani I.-F.* Nucl. Phys., 1977, **B135**, 111.
3. *Волков Д.В., Ткач В.И.* Письма в ЖЭТФ, 1980, **32**, 681; ТМФ, 1982, **51**, 171; *Волков Д.В., Сорокин Д.П., Ткач В.И.* Письма в ЖЭТФ, 1983, **38**, 397; ТМФ, 1984, **61**, 241.
4. *Salam A., Strathdee I.* Ann. Phys., 1982, **141**, 316; *Randjbar-Daemi S., Percacci R.* Phys. Lett., 1982, **117B**, 41; *Randjbar-Daemi S., Salam A., Strathdee I.* Nucl. Phys., 1983, **B214**, 491.
5. *Волобуев И.П., Кубышин Ю.А.* ТМФ, 1986, **68**, 225, 368.
6. *Кобаяси Ш., Номидзу К.* Основы дифференциальной геометрии. т. 1. М.: Наука, 1981.
7. *Pilch K., Schellekens A.N.* Nucl. Phys., 1985, **B256**, 109.

Поступила в редакцию
23 декабря 1986 г.
После переработки
24 марта 1987 г.

Научно-исследовательский институт
ядерной физики
Московского государственного университета