Письма в ЖЭТФ, том 45, вып. 10, стр. 457 – 460 *25 мая 1987 г.*

ТЕОРИЯ СТРУН И СТРУКТУРА УНИВЕРСАЛЬНОГО ПРОСТРАНСТВА МОДУЛЕЙ

А.Морозов

Сумма по всем петлям в теории струн в пределе бесконечной константы связи может рассматриваться как новая двумерная теория поля.

1. Одной из основных задач, стоящих в настоящее время перед теорией струн, является формулировка первичного квантования вне рамок разложения по петлям. Сейчас известны выра-

жения для амплитуд рассеяния струнных состояний для любого числа петель p. Они выражаются через конечнократные интегралы по пространствам модулей M_p римановых поверхностей рода p с известными подынтегральными выражениями [1], пропорциональными мерам Мамфорда $d\mu_p$. Ряд теории возмущений для амплитуды A имеет следующий вид:

$$A \sim \sum_{p=0}^{\infty} g^p \int_{M_p} a_p d\mu_p . \tag{1}$$

Очень полезной была бы формулировка теории, в которой интегрирование производилось бы по единому "универсальному пространству модулей", содержащему в себе все пространства M_p (см., например [2]). Размерности пространств M_p различны: $\dim_C M_p = 3p - 3$ для $p \geqslant 2$. Пространство модулей M_p с $p < p'$ естественно вкладываются в пространство $M_{p'}$, причем лежат на границе $M_{p'}$. Поэтому в качестве универсального пространства модулей можно было бы взять бесконечномерное пространство $M_\infty = \lim\limits_{p \to \infty} M_p$. При вложении M_p в $M_{p'}$ мера $a_p d\mu_p$ совпадает с ограничением $a_{p'} d\mu_{p'}$ на M_p. Это условие фиксирует относительную нормировку a_p для разных p.

Формула (1), записанная в терминах универсального пространства модулей должна иметь вид

$$A \sim \int_{M_\infty} a_\infty \, d\mu_\infty (g). \tag{2}$$

Этот интеграл по бесконечномерному пространству может быть записан как континуальный интеграл в некоторой теории поля (см. ниже). При конечных константах связи g мера $d\mu_\infty(g)$ должна быть сильно сингулярной: только в этом случае конечномерные подпространства M_p в M_∞ будут давать конечный вклад в интеграл. С точки зрения универсального пространства модулей выделенной является струнная теория с $g = \infty$, динамика которой целиком определяется поверхностями бесконечного рода. (Напомним, что в теории суперструн янг-миллсовская константа связи в низкоэнергетическом пределе выражается через произведение g и вакуумного среднего поля дилатона. Конечное вакуумное среднее дилатонного поля получить трудно, поэтому предел $g = \infty$ может иметь прямое отношение к реалистическим струнным моделям). Это соображение определяет последний незафиксированный параметр в безаномальных струнных теориях; по-видимому, эта модель является простейшей среди всех струнных моделей.

2. Универсальное пространство модулей может быть описано различными способами. Наиболее разработано одно из таких представлений — в виде бесконечномерного грассманиана Gr, — возникшее первоначально в теории уравнений Кадомцева — Петвиашвили [3–5]. Оно связано с развиваемым в последнее время операторным формализмом для описания петлевых поправок в струнных теориях [6, 7]. Интересующие нас меры $a_p d\mu_p$ и $a_\infty d\mu_\infty$ являются сечениями некоторых расслоений (точнее, пучков) над пространствами M_p и M_∞ соответственно. Они строятся по расслоениям j-дифференциалов L_j над римановыми поверхностями. Для простоты ограничимся случаем L_0 — функциями на римановой поверхности. Отметим на поверхности X точку ξ и маленькую окружность S вокруг нее. На поверхности имеется единственная голоморфная всюду функция — постоянная. Все остальные аналитические функции обязаны иметь полюса — быть мероморфными. Рассмотрим множество функций, голоморфных вне ξ, т. е. имеющих полюса только в ξ. Это множество функций определяется по поверхности X однозначно, наоборот, по самому этому множеству может быть восстановлена поверхность. Ограничение функций из этого множества на окружность S выделяет некоторое линейное подпространство $W_{X\xi}$ в пространстве H всех функций на окружности. Например, если X является римановой сферой (род $p = 0$), а ξ — ее северным полюсом, то множество функций, голоморфных вне ξ, — это линейные комбинации функций $1, z, z^2, \ldots$, и они выделяют в линейном пространстве H всех функций на окружности с базисом $\{t^k\}$ ($t = e^{i\phi}$, k — любое целое число) линейное подпространство H_+, натянутое на базисные век-

торы t^k с $k \geqslant 0$. Для поверхностей X более высокого рода подпространства W голоморфно зависят от комплексной структуры на X – от точки пространства модулей M_p. Например, на торе ($p = 1$), конформно эквивалентном параллелограмму $(1, \tau)$, функции, голоморфные вне ξ, строятся по функции Вейерштрасса

$$P(z \mid \tau) = \left[\frac{\theta'_*(0)}{\theta_*(z)} \right]^2 \sum_e \frac{\theta_e^2(z)}{\theta_e^2(0)} = 1/z^2 + p_2(\tau)z^2 + p_4(\tau)\, z^4 + \dots$$

и ее производным: $1, P(z - \xi \mid \tau); -\frac{1}{2} P'(z - \xi \mid \tau);\ \frac{1}{6}P''(z - \xi \mid \tau), \dots$ (полюс первого порядка запрещен). Сопоставляемое тору $(1, \tau)$ подпространство W в H натянуто на базис

$$\left\{ 1;\ t^2 + p_2(\tau)t^{-2} + p_4(\tau)t^{-4};\ t^3 - p_2(\tau)t^{-1} - 2p_4(\tau)t^{-3} - \dots; \dots;\ t^{2n+2} + \frac{1}{2n+1}p_{2n}(\tau) + (n+1)p_{2n+2}(\tau)t^{-2} + \dots; \dots \right\}, \left(t = \frac{1}{z - \xi} \right),$$

зависящий от τ. В общем случае, почти все линейные подпространства W в H, ортогональные проекции которых на $H_+ = \{ t^k, k \geqslant 0 \}$ имеют конечные ядро и коядро, однозначно сопоставляются римановым поверхностям X с отмеченной точкой ξ (и системой координат в окрестности ξ) [4]. Например, род p поверхности X определяется тем, что в W отсутствуют векторы вида $t^1(1 + O(t^{-1}));\ t^2(1 + O(t^{-1})); \dots t^p(1 + O(t^{-1}))$ (это верно для почти всех поверхностей и отмеченных точек; точный критерий чуть сложнее). Переходя от функций L_0 к произвольным j-дифференциалам, нужно везде заменить слово "функция" на "сечение расслоения L_j". Набор сечений L_j, голоморфных вне ξ, естественно, зависит от поверхности, ее комплексной структуры, отмеченной точки и от j. В частности, индекс ортогональной проекции $W \to H_+$ (разность размерностей ядра и коядра) равен $\chi(L_j) - 1 = (2j - 1)(p - 1) - 1$. По этой причине удобно рассматривать проекцию W не на H_+, а на подпространство $H_+^{(j)} = \{ t^k, k \geqslant 1 - (2j - 1)(p - 1) \}$. Тогда индекс равен нулю.

Таким образом, набор множеств W = набор линейных подпространств в H = бесконечномерный грассманиан Gr содержит в себе универсальное пространство модулей: $M_\infty \subset Gr$. (В Gr содержится еще зависимость от отмеченной точки ξ). Для амплитуды A при $g = \infty$ должно существовать представление в виде интеграла по Gr с несингулярной мерой

$$A = \int_{Gr} a\, d\mu. \tag{3}$$

На самом деле, эта формула может быть записана в виде континуального интеграла некоторой двумерной теории поля. Действительно, каждая точка грассманиана W является набором базисных векторов $\sum_{k < s} c_k^{(s)} t^k$ с различными s. Введем еще одну переменную u. Тогда вся информация о W содержится в функции двух переменных $W(t, u) = c_k^{(s)} u^s t^k$. Сам грассманиан есть набор полей $W(t, u)$, а интеграл (3) должен иметь запись в виде

$$A = \int DW\, \Phi_A \{ W(t, u) \}. \tag{4}$$

Вся зависимость от выбора амплитуды A может быть учтена введением источника $J(v) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n v^n$.

$$A = \Gamma_A \{ J(v) \} \int DW \Phi \{ W(t, u);\ J(v) \}. \tag{5}$$

3. Явный вид функционала Φ в (5) пока неизвестен. Однако, ясно, что он должен выражаться через так называемые τ-функции на грассманиане и родственные им объекты σ-сечения детерминантных расслоений (см. например [4]), а также обладать определенными свойствами ковариантности. Ковариантность должна обеспечивать независимость от выбора точ-

ки ξ, координат в ее окрестности и от выбора базиса в пространстве H. (Последнее требование аналогично условию $SO(n)$-ковариантности для конечномерных грассманианов $SO(n)/SO(k)\times SO(n-k)$. Кроме этого, требуется, чтобы на конечномерных подпространствах M_p в Gr мера в формуле (4) факторизовалась на известные петлевые формулы [1] и меру в ортогональном к M_p подпространстве.

τ-функции – специальные функции, зависящие от точки грассманиана W и от источника J, – являются детерминантами ортогонального проектирования линейного пространства $e^{J(t)}W$, полученного из W линейным преобразованием с бесконечномерной матрицей $e^{J(t)}$, на $H_+^{(J)}$: $\tau_W^{(j)}\{J\} = \det[e^{J(t)}W \to H_+^{(j)}]$. В соответствии с этим определением τ-функции несут информацию о значении j. Смысл представления (5) состоит в том, что действие стандартных операторов алгебры Вирасоро, $\Gamma(z) = \exp\sum_{n=1}^{\infty} z^n x_n \exp\sum_{n=1}^{\infty} z^n \frac{\partial}{\partial x_n}$, на τ-функцию порождает функции Грина j-дифференциалов на римановой поверхности:

$$\left[\Gamma(z)\overset{*}{\Gamma}(z')\tau_W^{(j)}\{x_n\}\right]\Big|_{x_n=0} \Big/ \tau_W^{(j)}(0) = G_W^{(j)}(z,z'). \qquad (6)$$

(В случае 1/2-дифференциалов это утверждение может быть связано с формулами [5] для τ-функций, представляющими их в виде континуальных интегралов по свободным фермионам на окружности: $\tau_W\{x_n\} = \int D_\psi D_{\psi}\, e^{\widetilde{\psi}C_W\psi}\, e^{\sum_n x_n\Lambda_n(\widetilde{\psi},\psi)}$. Оператор C_W должен быть устроен так, что для W, отвечающего римановой поверхности X, $\widetilde{\psi}C_W\psi = \int_X \widetilde{\Psi}\bar{\partial}\Psi$, где Ψ –1/2-дифференциалы на X. (Для остальных j-дифференциалов можно пользоваться "формулами фермионизации", типа тех, что обсуждались в [8], которые выражают их функции Грина через корреляторы 1/2-дифференциалов). Справедливость формулы (6) для 1/2-дифференциалов уже отмечалась в [5, 7]. В [7] указана также связь между τ-функциями, отвечающими различным j-дифференциалам.

Для нахождения функционала Ф ("действия" двумерной теории поля) требуется знать не только функции Грина, но также детерминанты операторов $\bar{\partial}_j$ и метрики в детерминантных расслоениях. По-видимому, более прямой путь должен использовать известные свойства ковариантности искомой меры на грассманиане.

Вся использованная информация о грассманиане заимствована из работы [4]. Я признателен Л.Алварецу-Гоме, А.А.Бейлинсону, А.В.Забродину, И.М.Кричеверу, Д.Р.Лебедеву, Ю.И.Манину, А.А. Рослому за обсуждения и объяснение различных вопросов, связанных с этой темой. Я благодарен Л.Алварецу-Гоме, приславшему мне работу [7], также посвященную приложению результатов [4] к теории струн.

Литература

1. *Polyakov A.M.* Phys. Lett., 1981, **103B**, 207; *Белавин А.А., Книжник В.Г.* ЖЭТФ, 1986, **91**, 364; Письма в ЖЭТФ, 1986, **43**, 319; *Mumford D.* L'Ens. Math., 1977, **23**, 39; *Faltings G.* Ann. Math., 1981, **119**, 387; *Манин Ю.И.* Письма в ЖЭТФ, 1986, **43**, 161; *Beilinson A.A., Manin Yu.I.* Comm. Math. Phys., 1986, **107** (2), 241; *Khizhnik V.G.* Phys. Lett., 1986, **180B**, 247.
2. *Friedan D., Shenker S.* Phys. Lett., 1986, **175B**, 287.
3. *Кричевер И.М.* ФАН, 1977, т. 11, вып. 1, с. 15.
4. *Segal G., Wilson G.* Publications of IHES, 1985, 61.
5. *Date E., Jimbo M., Kashiwara M., Miwa T.* J. Phys. Soc. of Japan 1981, **50**, 3806. *Jshibashi N., Matsuo Yu., Ooguri H.* Preprint UT-499, 1986.
6. *Beilinson A.A., Manin Yu.I., Shechtman Y.A.* Comm. Math. Phys., 1987; *Кричевер И.М., Новиков С.П.* ФАН, 1987.
7. *Alvarez-Gaumé L., Gomez C., Reina C.* Preprint CERN T-4641, 1987.
8. *Alvarez-Gaumé L., Bost J. Moore G., Nelson P., Vafa C.* Preprint HUTP/A039, 1986.

Институт теоретической
и экспериментальной физики

Поступила в редакцию
2 апреля 1987 г.