Письма в ЖЭТФ, том 45, вып. 10, стр. 499 – 502 *25 мая 1987 г.*

ФОРМИРОВАНИЕ ОБЛАСТЕЙ УСТОЙЧИВОСТИ ИЗ НЕУСТОЙЧИВЫХ СОСТОЯНИЙ В НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМАХ С ДИССИПАЦИЕЙ

В.Г.Каменский, С.В.Манаков

Предложен метод нахождения асимптотического вида решений уравнений второго порядка, описывающих переход из неустойчивого начального состояния в устойчивое.

Широкий круг задач, относящихся к различным областям физики, сводится к проблеме описания нелинейной стадии развития неустойчивости. Такие задачи возникают, если начальное состояние, экспоненциально неустойчивое в линейном приближении, осуществляется воздействием на систему внешних полей, быстро (по сравнению с характерным инкрементом) переводящих ее из устойчивого в неустойчивое состояние. Основная задача нелинейной динамики при этом состоит в выяснении вопроса о том, каким образом система релаксирует к новым устойчивым состояниям, если таковые имеются. Надеяться на аналитическое решение задачи в столь общей постановке не приходится, поскольку характер распада неустойчивого состояния сильно зависит от начальных условий, которые могут быть и неконтролируемыми (флуктуационного типа).

Однако в случае локализованных начальных возмущений Колмогоровым, Петровским и Пискуновым [1] было доказано чрезвычайно сильное утверждение о характере эволюции таких начальных данных для нелинейного уравнения диффузии (характерным примером уравнения такого типа является хорошо известное уравнение Гинзбурга – Ландау). Именно, было доказано, что для систем такого типа переход от неустойчивого к устойчивым стационарным решениям осуществляется при больших временах посредством стационарных бегущих волн, скорости которых однозначно определяются линейной частью уравнения, а форма фронта решением соответствующего обыкновенного дифференциального уравнения. На фундаментальных результатах работы [1] в той или иной мере основаны многие современные исследования (см. [2] и цитируемую там литературу).

В данной работе показано, что результаты аналогичного типа справедливы для более широкого класса задач. Кроме того найдено, что в случае достаточно малых начальных условий можно связать временную асимптотику решений с данными задачи Коши. Последнее обстоятельство является особенно интересным, поскольку речь идет о неинтегрируемых уравнениях.

Продемонстрируем справедливость высказанных выше утверждений на двух конкретных физических примерах.

Динамика перехода Фредерикса в нематических жидких кристаллах при наличии обратных потоков описывается в безразмерных переменных неустойчивым вариантом уравнения синус-Гордона

$$u_{tt} - u_{xx} + 2\gamma u_t = \sin u, \quad u \to 0 \quad \text{при } |x| \to \infty, \tag{1}$$

где $u = 2\varphi$ (φ – угол отклонения директора от начального положения), а $\gamma > 0$ пропорционально эффективной вязкости.

Нашей задачей является изучение динамики перехода от возмущенного решения $u = 0$ к "устойчивым вакуумам" $u = \pi(\mathrm{mod}\, 2\pi)$. Мы будем предполагать начальные данные для уравнения (1) сосредоточенными на конечном интервале и достаточно малыми[1)]. Для ма-

[1)] Последнее ограничение на качественный характер результатов, по-видимому, не влияет.

лых $u(x, t)$ уравнение (1) можно заменить его линейным вариантом, решение которого дается интегралом

$$u(x, t) = \int_\Gamma \{C^+(k)\exp(-i\omega_+ t) + C^-(k)\exp(-i\omega_- t)\} e^{ikx}\, dk, \tag{2}$$

где $\omega_\pm = -\gamma \pm i(k^2 - 1 - \gamma^2)^{1/2}$, контур Γ проходит в верхней полуплоскости k от $-\infty$ до $+\infty$. Ветвь корня удобно выбрать так, чтобы при больших $|k|$ он совпадал с k.

Рассмотрим поведение $u(x, t)$ (2) при больших x и t: $x = Vt + \tilde{x}$, $t \to \infty$ $V, \tilde{x} = O(1)$. Аналитические свойства подинтегрального выражения в (2) приводят к тому, что при достаточно больших t и $|V| > 1$, $u(x, t)$ тождественно обращается в нуль. При $V^2 < 1$ интеграл (2) имеет перевальную точку $k = ik(V)$, которая и определяет его асимптотику при $t \to \infty$

$$u(x, t) = (2\pi)^{1/2} t^{-1/2} (1+\gamma^2)^{1/4} (1-V^2)^{-3/4} C^+\left(iV\sqrt{\frac{1+\gamma^2}{1-V^2}}\right) \exp\left[(-\gamma + \sqrt{(1-V^2)(1+\gamma^2)})t - \tilde{x}\sqrt{\frac{1+\gamma^2}{1-V^2}}\right]. \tag{3}$$

Показатель экспоненты в (3) растет со временем, если $V^2 < V_c^2 = (1+\gamma^2)^{-1}$ и убывает, если $V^2 > V_c^2$.

Если начальное условие (то есть фактически C^+) настолько мало, что в пределах применимости метода перевала $u(x, t)$ (3) все-таки остается какое-то время достаточно малым, то (3) дает решение (1). При этом можно считать, что при $|V| > V_c$ $u(x, t) = 0$ при $t \to \infty$. Однако при $|V| < V_c$ решение (3) быстро становится непригодным.

Рассмотрим подробнее случай $V = V_c$. При этом

$$u(x, t) = (2\pi)^{1/2} \gamma^{-3/2} (1+\gamma^2) C^+(i\gamma^{-1}\sqrt{1+\gamma^2})\, t^{-1/2} \exp[-(1+\gamma^{-2})^{1/2}\tilde{x}] \tag{4}$$

и мало при $t \to \infty$, если $\tilde{x} \simeq O(1)$. Это решение будет соответствовать искомому нами, если его удастся продолжить разумным образом на область больших отрицательных $\tilde{x}$, где (4), очевидно, неприменимо. Заметим, что в (4) зависимость предэкспоненциального множителя от времени является медленной по сравнению с $\exp(-V_c t)$, так что $u(x, t)$ в основном зависит лишь от $\tilde{x} = x - V_c t$.

Уравнение (1) допускает решения вида $u(z)$, где $z = (x - V_c t)\sqrt{1+\gamma^{-2}}$, если $u(z)$ удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению

$$u_{zz} + 2u_z + \sin u = 0. \tag{5}$$

Нетрудно видеть, что ограниченные при всех z решения (5) имеют лишь следующие асимптотики: $u \to 0$ при $z \to +\infty$ и $u \to \pm\pi$ при $z \to -\infty$. Для уравнения (1) эти решения описывают стационарные бегущие волны, распространяющиеся со скоростью V_c в неустойчивую область $u = 0$; за фронтом волны образуется устойчивая область $u = \pm\pi$. Покажем, что такие решения хорошо сшиваются с линейной формулой (4).

Зафиксируем решение (5) следующим образом:

$$U \to \pi \text{ при } z \to -\infty; \quad U = e^{-z} + Aze^{-z} \text{ при } z \to +\infty. \tag{6}$$

При этом константа A определяется однозначно (через $U(z)$ мы будем впредь обозначать именно это решение). Рассмотрим теперь асимптотику решения $U(z+b)$ при $b \to \infty$, $z = O(1)$. Из (6) следует

$$U(z+b) = Abe^{-z}e^{-b}(1 + O(b^{-1})). \tag{7}$$

Сравнивая (4) и (7), видим, что параметр b следует определить из уравнения

$$Abe^{-b} = t^{-1/2}(2\pi)^{1/2}\gamma^{-3/2}(1+\gamma^2)C^+(i\gamma^{-1}\sqrt{1+\gamma^2}).$$

В результате получается решение

$$u(x,t) = U(z+b(t)) \tag{8}$$

в качестве главного члена асимптотики решения уравнения (1) в области $0 < V < 1$. Аналогичным образом строится решение для волны, бегущей влево.

В качестве второго примера рассмотрим уравнение.

$$u_{xt} + u_{tt} + 2\sigma u_t = \sin u, \quad u \to 0,\ x \to \infty\ , \tag{9}$$

возникающее в простейшем варианте теории лазерных усилителей [4, 5] с учетом проводимости среды σ на частоте перехода[2)]. Соответствующая постановка задачи для (9) состоит в следующем: $u(x,0) = 0$ при $x > 0$; $u(0,t) = u(t)$; $u(t) = 0$ при $t < 0$, что соответствует задаче Коши по x.

Как и в предыдущем примере будем считать входящий импульс $u(t)$ достаточно слабым. В этом случае в некоторой области применимо линейное приближение

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{u}(\omega)\exp\left[i\omega(x-t) + \frac{ix}{\omega} - 2\sigma x\right]d\omega\ , \tag{10}$$

где $\tilde{u} = (2\pi)^{-1}\int^{\infty} u(t)\exp(i\omega t)dt$.

Рассмотрим асимптотику (12) при $x, t \to \infty$, $t = xV^{-1} + \tilde{t}$, $V, \tilde{t} \sim O(1)$. При $0 < V < 1$ интеграл (10) опять вычисляется методом перевала

$$u(x,t) = (2\pi)^{1/2}t^{-1/2}\left(\frac{V}{1-V}\right)^{3/4}\tilde{u}\left[i\left(\frac{V}{1-V}\right)^{1/2}\right]\exp\left\{2x\left[\left(\frac{1-V}{V}\right)^{1/2} - \sigma\right]\right\}\exp\left[\tilde{t}\left(\frac{V}{1-V}\right)^{1/2}\right]. \tag{11}$$

Выражение (11) экспоненциально убывает с ростом x при $V > V_c = (1+\sigma^2)^{-1}$ и растет при $V < V_c$. При $V = V_c$ из (11) следует

$$u(x,t) = (2\pi)^{1/2}\,t^{-1/2}\sigma^{-3/2}\tilde{u}(i\sigma^{-1})\exp(\tilde{t}\sigma^{-1})\,. \tag{12}$$

Таким образом приближение применимо при $t \to \infty$ при $V > V_c$ а также при $V = V_c$, если $\tilde{t} = O(1)$ (при этом $u(x,t)$ существенно зависит лишь от $\tilde{t} = t - xV_c^{-1}$).

Для нахождения асимптотического решения (9) нам снова нужно найти решение (9) вида $u(t - xV_c^{-1})$, которое бы сшивалось с (12). Полагая $z = -\tilde{t}\sigma^{-1}$, убеждаемся, что задача полностью сводится к предыдущей: $u(z)$ удовлетворяет (5). Сшивка $U(z+C)$ при $C \to \infty$ с (12) дает $AC\exp(-C) = (2\pi)^{1/2}t^{-1/2}\sigma^{-3/2}\tilde{u}(i\sigma^{-1})$, так что асимптотика $u(x,t)$ при $x \to \infty$ имеет вид

$$u(x,t) = U\left[\frac{x - V_c t}{\sigma V_c} + C(t)\right].$$

Таким образом нами показано, что для уравнений (1) и (9) переход от неустойчивого к устойчивому состоянию осуществляется асимптотически в форме бегущей волны и предложен метод нахождения формы фронта и его скорости. Полученные результаты являются аналогом теоремы, сформулированной в [1] Обобщение метода на многомерный случай и, возможно, другие классы уравнений будет изложено в отдельной работе.

Литература

1. *Колмогоров А.Н., Петровский И.Г., Пискунов Н.С.* Бюлл. МГУ. Математика и механика, 1937, **1**, 1.
2. *Langer J.S.* Rev. Mod. Phys., 1980, **52**, 1.
3. *Пикин С.А.* Структурные превращения в жидких кристаллах. М.: Наука, 1981.
4. *McCall S.L., Hahn E.L.* Phys. Rev., 1969, **103**, 183.

[2)] Асимптотическая теория длинных усилителей без диссипации ($\sigma = 0$) была рассмотрена в работах [6, 7].

5. *Lamb G.L.* Rev. Mod. Phys., 1971, **43**, 99.
6. *Манаков С.В.* ЖЭТФ, 1982, **83**, 68.
7. *Gabitov I.R., Manakov S.V.* Phys. Rev. Lett., 1983, **50**, 495.

Институт теоретической физики
им. Л.Д.Ландау

Поступила в редакцию
12 марта 1987 г.