Письма в ЖЭТФ, том 45, вып. 11, стр. 511 – 512 *10 июня 1987 г.*

БОЗОННАЯ КИРАЛЬНАЯ АНОМАЛИЯ В ГРАВИТАЦИОННОМ ПОЛЕ

А.Д.Долгов, В.И.Захаров, И.Б.Хриплович

Показано, что для аксиального тока фотонов $K^{\mu} = -\epsilon^{\mu\nu\kappa\lambda} A_{\nu} \partial_{\kappa} A_{\lambda}$ во внешнем гравитационном поле существует треугольная аномалия, аналогичная аномалии для аксиального тока фермионов.

Вскоре после открытия [1] аномалии аксиального тока во внешнем электромагнитном поле аналогичная аномалия была обнаружена [2] для случая внешнего гравитационного поля, так что дивергенция аксиального тока a^{μ} безмассового дираковского спинора равна

$$\partial_{\mu} a^{\mu} = \frac{\alpha}{2\pi} F_{\mu\nu} \widetilde{F}^{\mu\nu} - \frac{1}{192\pi^2} R_{\mu\nu\alpha\beta} \widetilde{R}^{\mu\nu\alpha\beta} . \tag{1}$$

Здесь $F_{\mu\nu}$ – тензор напряженности электромагнитного поля, $R_{\mu\nu\alpha\beta}$ – тензор Римана, $\widetilde{F}^{\mu\nu}$, $\widetilde{R}^{\mu\nu\alpha\beta}$ – дуальные им величины,

$$\widetilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} F_{\alpha\beta}, \qquad \widetilde{R}^{\mu\nu\alpha\beta} = \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} R_{\rho\sigma}{}^{\alpha\beta} .$$

Мы хотели бы заметить прежде всего, что гравитационная аномалия может рассматриваться как своеобразный спиновый эффект. Действительно, пусть в некоторой области пространства $R\widetilde{R} \neq 0$. Тогда согласно (1) в этой области нарушается сохранение не только аксиального тока a_{μ}, но и тока $j_{\mu} = \frac{1}{2}(v_{\mu} + a_{\mu})$ лептонного заряда вейлевских нейтронов (v_{μ} – дираковский векторный ток). Иными словами, из этой области возникает поток лептонного заряда. Поскольку гравитоны непосредственно не взаимодействуют с лептонным зарядом, то этот факт представляется удивительным. Разрешение парадокса состоит в том, что для нейтрино лептонный заряд однозначно связан с киральностью. Соотношение (1) естественно интерпретировать тогда как результат спиновой поляризации вакуума: частицы одной киральности притягиваются к "центру" – источнику поля $R_{\mu\nu\alpha\beta}$, а частицы противоположной киральности излучаются.

Но если эта интерпретация верна, то подобная аномалия имеется и для бозонных полей со спином – спиновые эффекты в гравитационном поле универсальны.

Утверждение настоящей статьи состоит в том0 что такая аномалия действительно существует и для фотонов описывается следующим соотношением:

$$\partial_{\mu} K^{\mu} = -\frac{1}{96\pi^2} R_{\mu\nu\alpha\beta} \widetilde{R}^{\mu\nu\alpha\beta} , \tag{2}$$

где $K^{\mu} = -\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \partial_{\alpha} A_{\beta}$. A_{ν} – вектор-потенциал электромагнитного поля. В силу операторного тождества $\partial_{\mu} K^{\mu} = -\frac{1}{2} F\widetilde{F}$ (2) можно представить в виде

$$F\widetilde{F} = \frac{1}{48\pi^2} R\widetilde{R}. \tag{3}$$

Поясним, в каком смысле соотношение (2) представляет собой полный аналог соотношения (1). Прежде всего, о выборе тока K^{μ}. Поскольку при обсуждении аномалий удобно вводить инфинитизимальную массу в любом случае, то начнем со случая $m_{\gamma} \neq 0$. Тогда, как ток K^{μ} для фотонов так и ток $a^{\mu} = \bar{\psi}\gamma^{\mu}\gamma_5 \psi$ для фермионов представляют собой вектор Паули – Любаньского [3]. Далее, в пределе $m_{\gamma} \to 0$ среднее значение оператора $\int K^0 d^3x$ равно 1 для левополяризованного фотона и (-1) для правополяризованного фотона при условии, что волновая функция фотона нормирована стандартным образом. Таким образом, "заряд" $\int K^0 d^3x$ измеряет разность между числом левых и правых фотонов.

Ток K^μ не является калибровочно-инвариантным. Легко видеть, однако, что "заряд" $\int K^0 d^3x$ – инвариант относительно локальных калибровочных преобразований. Поэтому он может быть использован для классификации состояний в теории возмущений.

Рассмотрим, далее, переход тока a^μ в два фотона и два гравитона и переход тока K^μ в два гравитона. Каждый из таких переходов описывается одним формфактором:

$$\begin{aligned}\langle 0 \,|\, a^\mu \,|\, 2\gamma \rangle &= f_1(q^2)\, q^\mu F\tilde{F} \\ \langle 0 \,|\, a^\mu \,|\, 2g \rangle &= f_2(q^2)\, q^\mu R\tilde{R} \\ \langle 0 \,|\, K^\mu \,|\, 2g \rangle &= f_3(q^2)\, q^\mu R\tilde{R},\end{aligned} \tag{4}$$

где q – импульс тока. Наивно можно было бы ожидать, что мнимые части форм-факторов f_1, f_2, f_3 обращаются в нуль для тока фотонов K^μ и для безмассовых фермионов. В частности, мнимая часть $\mathrm{Im} f_1(q^2)$ должна обращаться в нуль в силу сохранения киральности в электромагнитных и гравитационных взаимодействиях. Аномалия на этом языке заключается в том, что мнимая часть на самом деле не нуль, но пропорциональна δ-функции, $\delta(q^2)$. Чтобы убедиться в этом, достаточно, например, ввести малую массу промежуточным частицам, а затем устремить ее к нулю. Дисперсионный интеграл от мнимой части остается конечным и при $m \to 0$. Подобное рассмотрение треугольной аномалии для фермионов во внешнем электромагнитном поле дано в работе [4]; здесь мы обобщаем его для случая фотонного треугольника во внешнем гравитационном поле.

Вычисление приводит к следующим результатам:

$$\begin{aligned}\mathrm{Im} f_1(q^2) &= -\frac{1}{4q^2}(1-v^2)\ln\frac{1+v}{1-v}, \\ \mathrm{Im} f_2(q^2) &= \frac{1}{128\pi}\,\frac{1}{q^2}(1-v^2)^2\ln\frac{1+v}{1-v}, \\ \mathrm{Im} f_3 &= \frac{1}{32\pi}\,\frac{1}{q^2}\,v^2(1-v^2)\ln\frac{1+v}{1-v},\end{aligned} \tag{5}$$

где v – скорость в СЦ. Определяя затем с помощью дисперсионных соотношений действительную часть форм-факторов $f_{1,2,3}$ по их мнимой части, приходим в пределе $m \to 0$ к (1) и (2).

Отметим бозонные киральные аномалии обсуждавшиеся ранее: для антисимметричного тензорного потенциала $A_{\mu\nu}$ в гравитационном поле [5] и для глюонного тока K_μ во внешнем поле Янга – Миллса [6]. Все известные киральные аномалии могут рассматриваться как аномалии в векторе Паули –Любаньского. Ясно, далее, что такая аномалия существует и для гравитонов во внешнем гравитационном поле. Можно думать, что коэффициенты при аномалии пропорциональны квадрату спиральности (1 : 4 : 16 для вейлевского спинора, фотона и гравитона, соответственно).

Авторы благодарны В.А.Новикову, М.Б.Волошину за полезные обсуждения.

Литература

1. *Adler S.L.*, Phys. Rev., 1969, **177**, 2426. *Bell J. Jackiw R.* Nuovo Cim., 1969, **60A**, 47.
2. *Delbourgo R., Salam A.* Phys. Lett., 1972, **40B**, 381; *Eguchi T., Freund P.O.* Phys. Rev. Lett., 1976, **37**, 1251.
3. *Lubansky K.* Physica, 1942, **9**, 310.
4. *Долгов А.Д., Захаров В.И.* ЯФ, 1971, **13**, 608, Nucl. Phys., 1971, **B27**, 525.
5. *Каллош Р.Э.* Письма в ЖЭТФ, 1983, **37**, 509.
6. *Shifman M.A., Vainshtein A.I.* Nucl. Phys., 1986, **B227**, 456. (соответствующий результат был получен совместно с В.А.Новиковым, см. стр. 473).

Институт теоретической
и экспериментальной физики

Поступила в редакцию
16 апреля 1987 г.