Письма в ЖЭТФ, том 45, вып. 11, стр. 538 – 540 *10 июня 1987 г.*

ФЛУКТУАЦИИ ЛОКАЛЬНОЙ ПЛОТНОСТИ СОСТОЯНИЙ В ОДНОМЕРНОМ ПРОВОДНИКЕ

Б.Л.Альтшулер, В.Н.Пригодин

Вычислена функция распределения флуктуаций локальной плотности состояний в одномерном проводнике. В случае конечной системы с открытой границей она имеет вид логарифмически нормального закона. Для бесконечного или замкнутого образца флуктуации описываются обратным гауссовским распределением. Обсуждается обобщение полученных результатов на случай диэлектрика произвольной размерности.

1. В последнее время в литературе интенсивно обсуждаются проблемы, связанные со статистическими (мезоскопическими) флуктуациями в проводниках со слабым беспорядком. Большой интерес и дискуссии вызывает вопрос о функции распределения этих флуктуаций. В [1, 2] было доказано, что флуктуации сопротивления одномерных проводников распределены по логарифмически нормальному (ЛН) закону. Еще раньше Вегнер [3] получил при произвольной размерности $d = 2 + \epsilon$ для моментов локальной плотности состояний выражение, соответствующее ЛН асимптотикам функции распределения. Рассмотрение в [3] велось в рамках нелинейной σ-модели в однопетлевом приближении. Также в однопетлевом приближении ЛН асимптотики были обнаружены в распределении флуктуаций проводимости и полной плотности состояний в размерности $(2 + \epsilon)$ [4].

В настоящей работе найдены точные функции распределения флуктуаций локальной плотности состояний в одномерном случае, справедливые как для типичных значений, так и в области далеких хвостов.

2. Общепринятое определение плотности состояний в точке x при энергии E имеет вид

$$\rho_0(E, x) = \sum_{\mu} |\psi_{\mu}(x)|^2 \delta(E - E_{\mu}) = \langle x | \delta(E - \hat{H}) | x \rangle , \tag{1}$$

где индекс μ нумерует точные собственные состояния гамильтониана $\hat{H}$ с волновой функцией ψ_{μ} и энергией E_{μ}. Можно, а в случае бесконечного или замкнутого образца необходимо, рассмотреть более общую величину. Она отличается от (1) размытием δ-функций, например, заменой их на лоренциан с некоторой шириной η. Можно также провести усреднение в координатном пространстве на масштабе Δ:

$$\rho_{\eta,\,\Delta} = \int_{-\Delta}^{\Delta} \frac{dy}{2\pi\Delta} \sum_{\mu} \frac{\eta}{(E - E_{\mu})^2 + \eta^2} \, | \psi_{\mu}(x + y) |^2 . \tag{2}$$

Мы рассмотрим случай слабого беспорядка $E\tau \gg 1, l \gg \lambda$, где l и τ – соответственно длина и время свободного пробега электрона, а λ – его длина волны. Ниже все длины мы будем измерять в единицах l, а все энергии – в единицах τ^{-1} и ограничимся случаем $\eta \ll 1$. Не пытаясь описать ситуацию при произвольном Δ, рассмотрим флуктуации двух величин ρ и $\tilde{\rho}$, которые определяются формулой (2) при $\Delta \ll \lambda$ и при $\lambda \ll \Delta \ll 1$ [6] соответственно. Случай $\Delta \gg 1$ рассмотрен в работе [7].

3. Для вычисления моментов функции распределения $W(\rho)$ и $W(\tilde{\rho})$ воспользуемся диаграммной техникой Березинского [5], в рамках которой эти моменты можно записать в виде

$$\left\{ \begin{matrix} \langle \rho^n(x) \rangle \\ \langle \tilde{\rho}^n(x) \rangle \end{matrix} \right\} = \sum_{m=0}^{\infty} m^{n-2} \left\{ \begin{matrix} a_n \\ \tilde{a}_n \end{matrix} \right\} R_m(\eta, x) L_m(\eta, x). \tag{3}$$

Здесь $R_m \,(L_m)$ – введенные Березинским блоки, равные сумме графиков, расположенных правее (левее) точки x и имеющих в этой точке $2m$ свободных концов. В (3) входят также комбинаторные множители $m^{n-2} a_n$ или $m^{n-2} \tilde{a}_n$, определяемые числом способов, которым можно составить блок R_m из n петель. При $m \gg 1$

$$a_n = 2^{1-n} \frac{n-1}{n(2n-1)} \frac{\Gamma^2(2n)}{\Gamma^5(n)}; \qquad \tilde{a}_n = \frac{n-1}{2n-1} \frac{\Gamma(2n)}{\Gamma^3(n)}, \tag{4}$$

где $\Gamma(n)$ — гамма-функция. Величина $R_m(\eta, x)$ удовлетворяет уравнению

$$\left(8\eta m + 2\frac{d}{dx}\right)R_m = m^2(R_{n+1} + R_{m-1} - 2R_m). \tag{5}$$

Граничное условие для (5) в случае открытой системы имеет вид $R_m(x=0) = \delta_{m0}$. Для решения (5) разумно сделать преобразование Лапласа по x и записать лапласовскую переменную в виде $q(q+1)$. Для лапласовского образа R_m при существенных для нас больших m найдем

$$r_m(\eta, q^2+q) = \Gamma^3(q)\Gamma^{-2}(2q)(2q+1)^{-1}(8\eta)^q(2m\eta)^{1/2}K_{2q+1}(2(8m\eta)^{1/2}), \tag{6}$$

где $K_q(z)$ – функция Бесселя. В полубесконечной системе

$$L_m(\eta, x) = R_m(\eta, x\to\infty) = q r_m(\eta, q)\big|_{q=0} = 2(8m\eta)^{1/2}K_1(2(8m\eta)^{1/2}). \tag{7}$$

Используя (3), (4), (6) и (7), для моментов в полубесконечной системе получим

$$\langle\tilde{\rho}^n(x)\rangle = \frac{\Gamma(n+1)}{2n-1}(8\eta)^{1-n}\left\{1 - \frac{n-1}{\pi n}\int_{-\infty}^{\infty} dp \frac{(n+ip-{}^1/_2)^2}{2ip+1} \frac{\Gamma^3({}^1/_2 - ip)}{\Gamma^2(-2ip)} \times\right.$$

$$\left.\times \left|\frac{\Gamma(n+ip-{}^1/_2)}{\Gamma(n)}\right|^4 \exp\left[-\frac{x}{8}\left(1+2\frac{\ln 8\eta}{x}\right)^2 + \frac{x}{8}\left(2ip - 2\frac{\ln 8\eta}{x}\right)^2\right]\right\}. \tag{8}$$

4. Рассмотрим сначала случай $\eta = 0$. Из (8) получим

$$\langle\tilde{\rho}^n\rangle = e^{n(n-1)x/2}; \qquad W(\tilde{\rho}) = (2\pi x)^{-1/2}\frac{1}{\rho}e^{-(1/2x)(\ln\tilde{\rho} + x/2)^2} \tag{9}$$

т. е. $W(\tilde{\rho})$ имеет резкий максимум при $\tilde{\rho} = \exp(-{}^3/_2 x)$ и спадает при удалении от этого значения по ЛН закону. При $x \to \infty$ реализуется только $\tilde{\rho} = 0$ и $\tilde{\rho} = \infty$. Этого и следовало ожидать при $\eta = 0$, т. е. для абсолютно точных уровней.

Введение конечного η в (8) приводит к тому, что $W(\tilde{\rho})$ на хвостах спадает гораздо быстрее, чем (9):

$$W\left(\tilde{\rho} \gg \frac{1}{8\eta}\right) \approx e^{-4\tilde{\rho}\eta}; \qquad W(\tilde{\rho} \ll 8\eta) \sim e^{-4\eta/\tilde{\rho}} \tag{10}$$

При $\eta \gg e^{-(x/2)}$ функция $W(\rho)$ вообще перестает зависеть от x. В этом случае (7) следует подставлять в (3) не только для L_m, но и для R_m. Наиболее простой вид при этом имеют выражения для моментов $\langle\rho^n\rangle$ и кумулянтов $\langle\rho^n\rangle_c$ плотности состояний при $\Delta =$ $= 0$:

$$\langle\rho^n_\eta\rangle = K_{n-1/2}(8\eta)/K_{-1/2}(8\eta); \quad \langle\rho^n_\eta\rangle_c = (4\eta)^{1-n}\frac{\Gamma\left(n-\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}. \tag{11}$$

Из (11) следует, что $W(\rho)$ имеет вид обратного гауссовского распределения

$$W(\rho) = \sqrt{\frac{4\eta}{\pi}}\frac{1}{\rho^{3/2}}\exp\left(-4\eta\frac{(\rho-1)^2}{\rho}\right). \tag{12}$$

5. Для интерпретации полученных результатов заметим, что даже, если $\eta = 0$, при наличии открытой границы электронные уровни имеют конечную ширину η_μ, связанную с выходом электрона из системы. При этом ρ имеет вид (2) с заменой η на η_μ. Величина η_μ из-за локализации электронных состояний в одномерном проводнике экспоненциально падает с удалением от границы: $\eta_\mu \sim \exp(-2\alpha_\mu x)$, где α_μ – обратный радиус локализации μ-го уровня, центрированного вблизи точки x. Естественно предположить, что α_μ распределено по нормальному закону $W(\alpha) \approx \left(\frac{x}{8\pi}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{x}{8}(\alpha - 1)^2\right)$. Вместе с экспоненциальной зависимостью η_μ от α_μ это дает ЛН закон (9). Видно, что основной вклад в $\rho_{\eta,\Delta}$ обеспечивает ближайший по энергии уровень, центрированный вблизи точки x. Флуктуации ρ в основном определяются флуктуациями ширины этого уровня, а не расстоянием до него.

Заметим, что для объяснения ЛН закона (9) нам потребовалась не специфика одномерного случая, а только факт локализации электронных состояний. Поэтому закон типа (9) должен быть справедливым в диэлектрическом состоянии при $\eta = 0$ для произвольной размерности.

При $\eta \gtrsim \exp(-x/2)$ суммарное затухание уровней перестает флуктуировать, и поведение $W(\rho)$ определяется характером пространственного и энергетического расположения уровней. Поэтому зависимость $W(\rho)$ вида (10) и (12) является также универсальной для диэлектрической фазы в системе произвольной размерности. При этом η может определяться, например, температурой или неупругой релаксацией.

6. В [4] было показано, что n-й момент флуктуации $\delta\nu$ полной плотности состояний пропорционален $\exp[n(n-1)\ln(\sigma_0/\sigma)]$, где σ_0 и σ – соответственно классическая и перенормированная удельные проводимости. Это прекрасно согласуется с (9), если положить $\sigma \sim \sim \sigma_0 \exp(-x/8)$. С другой стороны, наш результат по-видимому противоречит утверждению Вегнера [8] о том, что $\ln \langle\rho^n\rangle$ растет с ростом n не быстрее, чем линейно.

Авторы глубоко благодарны В.Е.Кравцову, И.В.Лернеру и Ю.А.Фирсову за полезное обсуждение результатов работы.

Литература

1. *Мельников В.И.* ФТТ, 1980, **22**, 2404; ФТТ, 1981, **23**, 782.
2. *Abrikosov A.A.* Sol. St. Comm., 1981, **37**, 997.
3. *Wegner F.* Z. für. Phys., 1980, **36**, 209.
4. *Альтшулер Б.Л., Кравцов В.Е., Лернер И.В.* Письма в ЖЭТФ, 1986, **43**, 342; ЖЭТФ, 1986, **91**, 2276.
5. *Березинский В.Л.* ЖЭТФ, 1973, **65**, 1251.
6. *Нахмедов Э.П., Пригодин В.Н., Фирсов Ю.А.* ЖЭТФ, 1987, **92**, вып. 6.
7. *Горьков Л.П., Дорохов О.Н., Пригара Ф.В.* ЖЭТФ, 1983, **85**, 1470.
8. *Wegner F.* Nucl. Phys., 1987, **B280** [FS.18], 193, 210.

Институт ядерной физики им. Б.П.Константинова
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
16 апреля 1987 г.