Письма в ЖЭТФ, том 45, вып. 12, стр. 595 – 597 *25 июня 1987 г.*

СПЕКТР СКОРОСТЕЙ РОСТА ИЗОЛИРОВАННОГО ДЕНДРИТА

Е.А.Бренер, С.Э.Есипов, В.И.Мельников

Исследован механизм отбора скорости и направления роста двумерного дендрита, связанный с анизотропией поверхностного натяжения. В пределе слабой анизотропии найдена скорость роста и показано, что дендрит растет в направлении наименьшего поверхностного натяжения.

Кристаллизация переохлажденного расплава может считаться типичной задачей о формировании структур. Стационарные решения для изолированного двумерного дендрита с учетом теплопроводности и тепловыделения на межфазной границе даются семейством парабол $y = -x^2/2\rho$, причем скорость роста $v \propto 1/\rho$ [1]. Наблюдаемая экспериментально форма дендрита действительно очень близка к параболе [2], однако параметр параболы ρ и скорость v однозначно определялись условиями роста. При попытке найти механизм отбора решений с определенной скоростью оказалось, что при конечном изотропном поверхностном натяжении на межфазной границе стационарные решения вообще отсутствуют. Решение проблемы было найдено с учетом анизотропии поверхностного натяжения и состоит в утверждении (сделанном на основании численных расчетов [3, 4]), что в этом случае имеется дискретный спектр скоростей, причем устойчиво лишь решение, отвечающее максимальной скорости.

Качественный анализ уравнений роста показал, что при малых значениях параметров анизотропии α и переохлаждения Δ скорость роста $v \propto \Delta^4\alpha^{7/4}$ [5]. Ниже построена аналитическая теория спектра скоростей фронта кристаллизации.

Форма изолированного стационарно растущего дендрита описывается уравнением

$$\Delta + (d_0/\rho)\,k[y(x)] = (p/\pi)\int_{-\infty}^{\infty} \exp[p[y(x') - y(x)]\,\}\, K_0\,\{p\sqrt{(x-x')^2 + [y(x) - y(x')]^2}\,\}dx', \tag{1}$$

где K_0 – функция Макдональда, все длины измерены в ρ, $\Delta = (T_m - T_0)c_p L^{-1}$ – безразмерное переохлаждение (T_m – температура плавления, T_0 – температура расплава, c_p – теплоемкость, L – теплота плавления), $d_0 = \gamma T_m c_p L^{-2}$ – капиллярная длина (γ – поверхностное натяжение), $k[y(x)] = y''/(1+y'^2)^{3/2}$ – кривизна фронта, p – число Пекле, $p = v\rho/2D$, D – температуропроводность (тепловые характеристики фаз одинаковы). В отсутствие поверхностного натяжения ($d_0 = 0$) решением (1) является парабола $y(x) = -x^2/2$ и $\Delta = 2\sqrt{p}\,e^p\int_{\sqrt{p}}^{\infty} e^{-y^2}dy$ [1]. Как и в [5], введем конечное слабо анизотропное поверхностное натяжение $d_0 = \bar{d}_0(1 - \alpha\cos 4\theta)$, $\mathrm{tg}\,\theta = dy/dx$, $\alpha \ll 1$. При этом форма фронта искажается, $y(x) = y_0(x) + \zeta(x)$, и линейное уравнение для $\zeta(x)$ в пределе $\sigma = \bar{d}_0/p\rho \ll 1$, $\Delta \ll 1$ имеет вид [5]

$$\sigma\zeta'' - \frac{3\sigma\zeta'}{(1+x^2)} - \frac{(1+x^2)^{3/2}}{2\pi A(x)}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x+x'}{x-x'}\;\frac{\zeta(x)-\zeta(x')}{1+(x+x')^2/4}\,dx' = \sigma\;, \tag{2}$$

где $A(x) \simeq 1 + 8\alpha x^2/(1+x^2)^2$. Интеграл в (2) берется по вычетам, если разделить функцию $\zeta(x)$ на слагаемые $\zeta_+(x)$ и $\zeta_-(x)$, аналитические в верхней и нижней полуплоскости комплексных x. Пренебрегая производными, получаем уравнение типа Винера – Хопфа, $(x+i)\times[\zeta_+(x) - \zeta_+(-x+2i)] - (x-i)[\zeta_-(x) - \zeta_-(-x-2i)] = i\sigma A(x)(1+x^2)^{-1/2}$, решение которого $\zeta(x) \propto \sigma$ и имеет особенности в точках $x = \pm i$. Члены с производными в (2) существенны в области $|x \pm i| \sim \alpha^{1/2}$ и выступают в роли сингулярного возмущения.

Рассмотрим подробнее окрестность точки $x = i$. Вблизи нее достаточно учитывать только $\zeta_-(x)$ и после замен $x = i(1 - \alpha^{1/2}t)$, $\psi(t) = \alpha^{-1}t^{-3/4}\zeta_-[x(t)]$ для ψ получим уравнение

$$d^2\psi/dt^2 + P^2(t)\psi = -1/(4t^{3/4}), \tag{3}$$

где

$$P^2(t) = -[2^{1/2}\lambda t^{7/2}/(t^2-2)+21/(16t^2)]\,. \tag{4}$$

Малые параметры σ и α исключены введением $\lambda = \alpha^{7/4}/\sigma$. Уравнение (3) – неоднородное уравнение Шредингера, определенное в комплексной плоскости t с разрезом по полуоси $(-\infty, \sqrt{2})$, а его решение при $1 \ll |t| \ll \alpha^{-1/2}$ должно иметь асимптотику $\psi = t^{-9/4}/(2^{5/2}\lambda)$, которая получается в пренебрежении производной в (3) и обеспечивает сшивку с решением уравнения Винера – Хопфа в области $1 \gg |x-i| \gg \alpha^{1/2}$.

При $|t| \gg 1$ квазиклассические решения однородного ууравнения (3) имеют вид $\psi_{1,2} \propto t^{-3/8}\exp[\pm(4+7)2^{1/4}\lambda^{1/2}t^{7/4}]$. Сформулированные выше граничные условия эквивалентны поэтому конечности решения (3) на лучах $\arg t = 0,\ \pm 4\pi/7$. Эти условия выполнимы только при некоторых значениях параметра λ, что и определяет спектр скоростей изолированного дендрита. Вычислим спектр λ в квазиклассическом приближении, считая формально $\lambda \gg 1$. Для этого достаточно решить уравнение (3), во-первых, в той окрестности точки $t = 0$, в которой расположены точка ветвления и полюс второго порядка при $t = 0$ и точка поворота при $t_1 \simeq 2^{-7/11}(21/\lambda)^{2/11} \ll 1$, во-вторых, вблизи точки поворота $t_2 = \sqrt{2}$, где $P^2(t)$ имеет полюс, и, наконец, сшить эти решения с ипользованием квазиклассических асимптотик, пригодных между точками поворота t_1 и $t_2 = \sqrt{2}$.

Вблизи точки $t = 0$ частное решение неоднородного уравнения (3) можно представить в виде $\psi_н \propto t^{5/4}\varphi(\lambda t^{11/2})$, где $\varphi(z)$ – степенной ряд по z. Решения однородного уравнения даются функциями $t^{1/2}J_{\pm 5/11}(2^{7/4}\lambda^{1/2}t^{11/4}/11)$, где J_ν – функция Бесселя. Константы при однородных решениях определяются условием убывания полного решения на лучах $\arg t = 2\pi/11,\ 6\pi/11$ (при переходе от $|t| \ll 1$ к $|t| \gg 1$ эти лучи отвечают лучам $\arg t = 0$ и $\arg t = 4\pi/7$). На верхнем берегу разреза (t_1, t_2) тогда имеем

$$\psi \propto P^{-1/2}(t)\exp\left\{i\left[\int_{t_1}^{t} P(t')dt' - 5\pi/44\right]\right\}\,. \tag{5}$$

В окрестности точки поворота $t_2 = \sqrt{2}$ решение (3), действительное и убывающее при $t \to \infty$, получается с использованием функции Макдональда $K_1(z)$ и на верхнем берегу разреза имеет вид

$$\psi \propto P^{-1/2}(t)\exp\left\{-i\left[\int_{t}^{\sqrt{2}} P(t')dt' + 3\pi/4\right]\right\}. \tag{6}$$

Решение для $\psi(t)$ в нижней полуплоскости t получается из найденного комплексным сопряжением. Сшивание решений (5) и (6) дает условие на квазиклассический спектр λ,

$$\int_{t_1}^{\sqrt{2}} P(t)dt = \pi(n+4/11); \qquad n = 0, 1, 2 \ldots\,, \tag{7}$$

где t_1 – корень уравнения $P(t) = 0$. При $n \gg 1$ из (7) следует $\lambda_n \simeq 3{,}0n^2$.

Скрость роста при $\Delta \ll 1$ дается выражением

$$v_n = 2D\Delta^4\alpha^{7/4}/(\pi^2\lambda_n d_0)\,. \tag{8}$$

Спектр λ_n был получен также численным интегрированием уравнения (3) и имеет вид $\lambda_0 \approx 0{,}48$ (0,79), $\lambda_1 \approx 5{,}8$ (7,3), $\lambda_2 \approx 17{,}5$ (19,7), $\lambda_3 \approx 34{,}4$ (38,5), где в скобках указаны, значения, полученные из (7). Согласно численным результатам [4], устойчивым и, следовательно, экспериментально наблюдаемым должно быть лишь решение с λ_0.

Уравнение (2) записано в предположении $p, \Delta \ll 1$ [5]. Наш анализ показывает, что ввиду малого размера сингулярных областей вблизи $x = \pm i$ линейное уравнение для сингулярной части функции $\zeta(x)$ будет применимо, пока $p \ll \alpha^{-1/2}$, т. е. и при $p \sim 1$. В этом случае решение для регулярной поправки к форме фронта получить не удается, но для определения зависимости скорости фронта от переохлаждения достаточно использовать точную связь p и Δ. Отсюда следует, что анизотропия поверхностного натяжения α – единственный малый параметр, используемый в задаче.

Мы вычислили скорость роста дендрита, ориентированного в направлении наименьшего поверхностного натяжения. Если эти направления отличаются на угол φ, то в выражении (4) для $P^2(t)$ надо заменить $(t^2 - 2)$ на $[t^2 - 2\exp(-4i\varphi)]$. Оказывается, что решение с заданными граничными условиями возможно только при $\varphi = 0$. Таким образом, дендрит может расти только в направлении наименьшего поверхностного натяжения. Этот вывод носит общий характер и не должен быть непосредственно связан с малостью параметра α, использованной в наших расчетах. Его экспериментальное подтверждение послужило бы веским доводом в пользу обсуждаемого механизма отбора скоростей и направлений роста двумерного дендрита.

Авторы признательны С.В.Иорданскому за постояннй интерес к работе, способствовавший ее продвижению.

Литература

1. *Иванцов Г.П.* ДАН СССР, 1947, **58**, 567.
2. *Honjo H., Ohta S., Sawada Y.* Phys. Rev. Lett., 1985, **55**, 841.
3. *Kessler D., Levine H.* Phys. Rev. B, 1986, **33**, 7867.
4. *Kessler D., Levine H.* Phys. Rev. Lett., 1986, **57**, 3069.
5. *Barbieri A., Hong D.C., Langer J.S.* Phys. Rev. A, 1981, **35**, 1802.

Институт теоретической физики им. Л.Д.Ландау
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
5 мая 1987 г.