

Кристаллизационные волны на атомно-гладкой поверхности

Р. Б. Гусев, А. Я. Паршин¹⁾

Институт физических проблем им. П.Л. Капицы РАН, 119334 Москва, Россия

Поступила в редакцию 7 мая 2007 г.

Показано, что на атомно-гладких поверхностях (гранях) квантового кристалла могут существовать бегущие волны, аналогичные кристаллизационным волнам на атомно-шероховатой поверхности. Однако в отличие от последних, эти волны существенно нелинейны даже при малых амплитудах. Определена скорость распространения таких волн как функция их амплитуды и длины волны.

PACS: 67.80.–s, 68.08.–p

Принято считать, что кристаллизационные волны – слабозатухающие колебания поверхности квантового кристалла, находящегося в контакте со сверхтекучей жидкой фазой, обусловленные периодическим плавлением и кристаллизацией [1, 2] – могут существовать на атомно-шероховатой границе, но не на атомно-гладкой (то есть грани). Дело в том, что для существования кристаллизационных волн необходимо, чтобы процессы плавления и кристаллизации были практически бездиссипативными. Этому условию удовлетворяет, при достаточно низких температурах, атомно-шероховатая поверхность кристалла гелия, для которой характерно быстрое увеличение кинетического коэффициента роста при понижении температуры, в противоположность гладкой поверхности, для которой коэффициент роста экспоненциально мал по пересыщению при любых температурах (обзор современного состояния этого вопроса, как и других вопросов кинетики и термодинамики поверхности кристаллов гелия, см. в [3]).

Вицинальная поверхность, то есть поверхность, близкая по ориентации к одной из граней, остается в атомно-шероховатом состоянии вплоть до температуры соответствующего фазового перехода огранения/ошероховачивания (roughening transition). Поэтому и кристаллизационные волны на такой поверхности принципиально не отличаются от волн кристаллизации на других шероховатых поверхностях. В то же время, вицинальную поверхность можно рассматривать как эшелон элементарных ступеней одного “знака”. Соответственно, процессы роста и плавления на вицинальной поверхности можно рассматривать как результат движения элементарных ступеней. С этой точки зрения волна с волновым вектором, перпендикулярным линиям ступеней, есть не что иное, как волна плотности ступеней (см. рис.1).

Поскольку все ступени имеют одинаковый знак, амплитуда углов наклона поверхности в такой волне ограничена углом θ между невозмущенной вициналь-

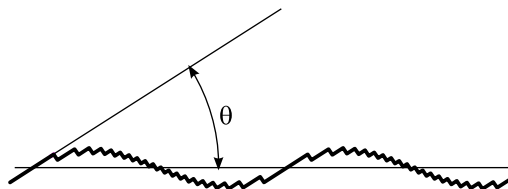


Рис.1. Схематическое изображение кристаллизационной волны на вицинальной поверхности. Высота элементарной ступени по отношению к амплитуде волны сильно увеличена для наглядности

ной поверхностью и исходной гранью. Необходимо уточнить также, что для того чтобы поверхность можно было рассматривать как ступенчатую, необходимо, чтобы среднее расстояние между ступенями было мало по сравнению с эффективной шириной ступени ξ , которая может быть существенно различной для различных граней и, в частности, может быть гораздо больше высоты ступени a [3]. Другими словами, величина самого угла θ ограничена условием $\theta \ll a/\xi$.

Возникает вопрос: могут ли существовать волны, в которых одновременно присутствуют ступени обоих знаков? При этом наиболее интересным представляется симметричный случай, когда невозмущенная поверхность вовсе не содержит ступеней, то есть является атомно-гладкой (рис.2). Ответу на этот вопрос и посвящена данная заметка.

Прежде всего отметим, что распространение волны, изображенной на рис.2, связано только с движением имеющихся ступеней, а не с образованием новых (или их исчезновением). Поэтому при достаточно низких температурах, когда подвижность ступеней велика, такой процесс был бы практически без-

¹⁾e-mail: parshin@kapitza.ras.ru

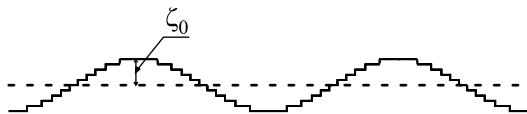


Рис.2. Кристаллизационная волна на атомно-гладкой поверхности

диссипативным. Подчеркнем, что речь может идти лишь о бегущих, но не о стоячих волнах. Заранее неясно, однако, могут ли существовать волны такого типа. Кроме того, для эксперимента важен вопрос о возможности их возбуждения.

Ограничимся рассмотрением плоских волн $\zeta(x, t)$ макроскопической амплитуды ζ_0 . Будем считать жидкость и кристалл несжимаемыми, а амплитуду – достаточно малой по сравнению с длиной волны, так, чтобы было $|\zeta_x| \ll a/\xi$. Уравнение движения поверхности в этом случае может быть записано в виде (ср. [4]):

$$\frac{(\rho_c - \rho_l)^2}{\pi \rho_l} \int \ln \left(\frac{R}{|x' - x|} \right) \ddot{\zeta}(x') dx' - \bar{\alpha}(\zeta_x) \zeta_{xx} = 0, \quad (1)$$

где ρ_c и ρ_l – плотности кристалла и жидкости, соответственно, $\bar{\alpha}$ – поверхностная жесткость, R – размер поверхности в направлении, перпендикулярном x .

Уравнение (1) представляет собой, по существу, условие локального (для данного x) равновесия поверхности. Согласно сказанному выше, это условие можно считать выполненным только на наклонных (шероховатых) участках поверхности ($\zeta_x \neq 0$). На атомно-гладких ($\zeta_x = 0$) участках вместо (1) выполнено условие $\dot{\zeta} = 0$. Соответственно, интегрирование в (1) фактически ведется по той же области, в которой ищется решение, то есть где $\zeta_x \neq 0$. В силу условия $|\zeta_x| \ll a/\xi$, речь идет о вицинальных поверхностях, для которых, согласно существующим представлениям (см. [3]), можно положить $\bar{\alpha} = \gamma|\zeta_x|$.

Будем искать решение (1) в виде бегущей волны $\zeta(x, t) = \zeta(x - Vt)$ с длиной волны λ . Далее, пусть волна имеет простейший вид (как на рис.2), когда последовательные полуволны отличаются лишь знаком ζ_x : $\zeta_x(x + \lambda/2) = -\zeta_x(x)$, а в пределах одной полуволны ζ_x не меняет знака. Тогда в (1) можно предварительно просуммировать по отдельным полуволнам, а затем интегрировать в пределах одной полуволны. В результате получим (для x в пределах одной полуволны с $\zeta_x \geq 0$):

$$\frac{(\rho_c - \rho_l)^2 V^2}{\pi \rho_l} \int_{-\lambda/4}^{\lambda/4} \ln \tan \frac{\pi}{\lambda} |x' - x| \zeta_{x' x'} dx' + \gamma \zeta_x \zeta_{xx} = 0. \quad (2)$$

Это уравнение не может быть решено аналитически (за исключением одного специального случая, см. ниже). Поэтому будем искать решение численно, вариационным методом. Соответствующий функционал есть не что иное, как энергия (на единицу площади поверхности) в системе отсчета, движущейся со скоростью V :

$$E = \frac{(\rho_c - \rho_l)^2 V^2}{\pi \rho_l \lambda} \iint_{-\lambda/4}^{\lambda/4} \ln \tan \frac{\pi}{\lambda} |x' - x| \zeta_x \zeta_{x'} dx dx' + \frac{\gamma}{3\lambda} \int_{-\lambda/4}^{\lambda/4} \zeta_x^3 dx. \quad (3)$$

Как уже указывалось, искомая функция ζ_x может быть отлична от нуля не на всем интервале $(-\lambda/4, \lambda/4)$, а лишь на его части $(-\lambda\varepsilon/4, \lambda\varepsilon/4)$, причем величина ε сама подлежит определению. Кроме того, при заданных скорости V и амплитуде ζ_0 длина волны λ тоже определяется условием минимальности функционала (3). Фактически варьирование удобно вести, представив (3) в виде

$$F = \frac{1}{\nu} \iint_{-1}^1 \ln \tan \frac{\pi\varepsilon}{4} |y - y'| f(y) f(y') dy dy' + \frac{1}{\nu^3 \varepsilon^2} \int_{-1}^1 f^3 dy, \quad E = \frac{128}{3} \frac{\gamma \zeta_0^3}{\lambda_0^3} F, \quad (4)$$

где $\nu = \lambda/\lambda_0$, $\lambda_0^2 = \frac{32\pi}{3} \frac{\gamma \rho_l \zeta_0}{(\rho_c - \rho_l)^2 V^2}$, а функция $f = \frac{\lambda\varepsilon}{8\zeta_0} \zeta_x$ нормирована условием $\int_{-1}^1 f dy = 1$.

Функционал (4) достигает своего минимального значения $F_{\min} = -0.893$ при $\varepsilon = 0.612$, $\nu = 1.221$ и $f(y)$ вида

$$f(y) = \frac{2}{\pi} \sqrt{1 - y^2} \sum_n C_n U_n(y), \quad (5)$$

где U_n – полиномы Чебышева второго рода с коэффициентами, быстро убывающими с ростом n : $C_0 = 1$, $C_2 = 9.3 \cdot 10^{-4}$, $C_4 = 1.8 \cdot 10^{-5}$, $C_6 < 5 \cdot 10^{-7}$, $C_1 = C_3 = C_5 = 0$. Отметим дополнительную симметрию этого решения: функция f – четная. При удалении от точки минимума по ε и ν значения функционала F быстро возрастают, что, по-видимому, исключает наличие других минимумов. Однако мы не можем исключить возможности существования не-симметричных решений, поскольку, как легко показать, при нарушении симметрии значения коэффициентов C_n меняются скачкообразно (как при фазовом переходе первого рода).

Таким образом, найденное решение действительно соответствует волне, изображенной на рис.2, в которой плоские участки чередуются с искривленными. Эта волна устойчива относительно малых возмущений формы, а также параметров λ и ε , и распространяется со скоростью, зависящей от амплитуды. Закон дисперсии таких волн может быть записан в виде

$$\omega^2 = V^2 k^2 = \frac{8}{3\pi} \frac{\rho_l \gamma}{(\rho_c - \rho_l)^2} \nu^2 k^4 \zeta_0, \quad (6)$$

где $k = 2\pi/\lambda$ – волновое число. Сравнивая с обычными кристаллизационными волнами, для которых

$$\omega^2 = \frac{\rho_l \tilde{\alpha}}{(\rho_c - \rho_l)^2} k^3, \quad (7)$$

видим, что закон дисперсии (6) соответствует эффективной поверхностной жесткости $\tilde{\alpha}_{\text{эф}} = \frac{8}{3\pi} \gamma \nu^2 k \zeta_0$. Здесь необходимо отметить, что всюду в этой заметке мы пренебрегаем наличием поля тяжести. Тем самым мы предполагаем, что длина волны, а с ней и амплитуда, малы по сравнению с эффективной капиллярной длиной, определяемой как $l_{\text{эф}} = \sqrt{\gamma/(\rho_c - \rho_l)g}$ (для грани (0001) кристалла ${}^4\text{He}$ $l_{\text{эф}} \sim 1$ мм [3]). Это требование, вместе со сформулированными ранее условиями, и определяет область применимости полученных результатов.

Специального рассмотрения заслуживает предельный случай, когда $\varepsilon \rightarrow 0$, но произведение $\varepsilon\nu$ остается конечным. В этом случае уравнение (2) фактически описывает уединенную полуволну (кинк) высотой $2\zeta_0$ и длиной $\Delta = \varepsilon\nu\lambda_0/2$, поскольку взаимодействием с другими кинками, которые удалены на расстояния, кратные $\nu\lambda_0/2$, можно пренебречь. Вместо F теперь варьированию подлежит функционал

$$F_1 = \iint_{-1}^1 \ln \varepsilon |y - y'| f(y) f(y') dy dy' + \frac{1}{\varepsilon^2 \nu^2} \int_{-1}^1 f^3 dy, \quad (8)$$

минимум которого достигается при

$$f(y) = \frac{2}{\pi} \sqrt{1 - y^2}, \quad \varepsilon\nu = \frac{\sqrt{6}}{\pi}. \quad (9)$$

В устойчивости этого решения можно убедиться, представив произвольное малое возмущение $\delta\zeta$ (нормированное на $2\zeta_0$) в виде ряда по полиномам Чебышева, аналогичного (5). Соответствующая вариация F_1 – существенно положительная величина

$$\delta F_1 = \frac{\pi^2}{2} \sum_n n(n+1) C_n^2. \quad (10)$$

Необходимые интегралы от полиномов Чебышева можно найти, например, в [5].

Как и в случае периодических волн, легко убедиться, что решение (9) удовлетворяет необходимым условиям в широком диапазоне скоростей, амплитуд и длин Δ , соотношение между которыми может быть записано в виде

$$V^2 = \frac{16}{\pi} \frac{\rho_l \gamma}{(\rho_c - \rho_l)^2} \frac{\zeta_0}{\Delta^2}. \quad (11)$$

Весьма вероятно, что исходное уравнение (1) имеет и другие решения, устойчивые к малым возмущениям, которые соответствуют, например, различным комбинациям уединенных волн или более сложным, чем рассмотренная, конфигурациям периодических волн. Однако исследование всех этих возможностей, а также различных нестационарных процессов, выходит за рамки данной заметки.

Что касается возможности возбуждения рассматриваемых волн на поверхности реальных кристаллов гелия, то в принципе для этого пригодны те же методы, что и для обычных кристаллизационных волн, например, с использованием электрического поля [2, 3]. Имеется, однако, существенное различие: в данном случае возбуждение волн кристаллизации носит пороговый характер, поскольку оно связано с ростом и (или) плавлением атомно-гладкой поверхности. Величина порога (разность химических потенциалов кристалла и жидкости) может быть оценена как $\delta\mu \approx 2\beta/Ra$, где β и a – энергия на единицу длины и высота элементарной ступени, соответственно, R – размер критического зародыша. Электрическое поле E создает $\delta\mu = (\varepsilon_c - \varepsilon_l)E^2/8\pi$, где $\varepsilon_c - \varepsilon_l$ – разность диэлектрических постоянных кристалла и жидкости, откуда пороговая напряженность поля

$$E_{tr} \approx \sqrt{\frac{16\pi\beta}{(\varepsilon_c - \varepsilon_l)Ra}}. \quad (12)$$

При $\beta/a = 0.014$ эрг/см², как для грани (0001) кристалла ${}^4\text{He}$, и $R = 10^{-3}$ см получаем $E_{tr} \approx 10^5$ В/см, что вполне достижимо в реальном эксперименте [2, 3].

Ранее уже отмечались единичные случаи наблюдения уединенных волн на гранях кристаллов ${}^4\text{He}$ [6] и ${}^3\text{He}$ [7] в отсутствие электрического поля, но при сильном встряхивании экспериментальной ячейки или в процессе быстрого роста или плавления кристалла. Однако экспериментальные условия во всех этих случаях были далеки от стационарных, что не позволяет интерпретировать эти наблюдения как экспериментальное подтверждение существования волн рассмотренного выше типа.

Мы благодарны В.И. Марченко и Е.Р. Подolyку за полезные обсуждения. Работа выполнена при финансовой поддержке Программы Президента Российской Федерации поддержки ведущих научных школ, грант # НШ-5763.2006.2 и гранта Российского фонда фундаментальных исследований # 07-02-00166а.

-
1. А. Ф. Андреев и А. Я. Паршин, *ЖЭТФ* **75**, 1511 (1978) (Sov. Phys. JETP **48**, 763 (1978)).
 2. К. О. Кешисhev, А. Я. Паршин, А. В. Бабкин, *ЖЭТФ* **80**, 716 (1981) (Sov. Phys. JETP **53**, 362 (1981)).
 3. S. Balibar, H. Alles, and A. Ya. Parshin, *Rev. Mod. Phys.* **77**, 317 (2005).
 4. А. Я. Паршин и В. Л. Цымбаленко, *Письма в ЖЭТФ* **77**, 372 (2003) (JETP Lett. **77**, 321 (2003)).
 5. *Handbook of Mathematical Functions*, Eds. M. Abramovitz and I. A. Stegun, National Bureau of Standards, 1964.
 6. К. О. Кешисhev, А. Я. Паршин, and А. И. Шал'ников, in *Soviet Scientific Reviews*, Ed. I. M. Khalatnikov, Section A: Physics Reviews, vol. 4, Harwood Academic, New York, 1982.
 7. V. Tsepelin, H. Alles, A. V. Babkin et al., *J. Low Temp. Phys.* **129**, 489 (2002).