

Атомные “иглы” и “пули” конденсата Бозе–Эйнштейна и формирование наноразмерных структур

Н. Н. Розанов¹⁾, Ю. В. Рождественский, В. А. Смирнов, С. В. Федоров

Научно-исследовательский институт лазерной физики 199034 Санкт-Петербург, Россия

Поступила в редакцию 15 декабря 2002 г.

При модификации уравнения Гросса–Питаевского с включением члена, описывающего нелокальность межатомного взаимодействия, показано существование предельно узких двумерных и трехмерных солитонных состояний атомарных конденсатов Бозе–Эйнштейна. Для атомов лития их размеры по оценкам доходят до ~ 20 – 60 нм (атомные “иглы” и “пули”). Оценены времена жизни таких солитонов, определяемые двух- и трехчастичными столкновениями. Проведено сравнение предельных возможностей получения наноструктур с помощью атомных “игл” и “пуль” и другими нанолитографическими методами.

PACS: 42.50.Rh, 67.40.–w

Для атомарных конденсатов Бозе–Эйнштейна (БЭК), описываемых уравнением Гросса–Питаевского [1], возможны лишь одномерные солитонные состояния, которые недавно наблюдались в экспериментах с атомами лития [2, 3]. Обычно считается (см., например, [4]), что двумерные и трехмерные солитоны конденсата не существуют из-за коллапса конденсата с достаточно большим числом атомов. Ситуация здесь близка к описываемой в оптике нелинейным уравнением Шредингера самофокусировке излучения в средах с кубической (керровской) нелинейностью [5]. Однако в оптике имеется ряд факторов, ограничивающих коллапс, в том числе эффекты непараксиальности. Из-за них конечной стадией самофокусировки пучков с закритической мощностью может служить формирование пространственного солитона, в том числе с шириной, меньшей длины волны света – “оптической иглы” [6, 7]. Естественно полагать, что учет дополнительных факторов будет приводить к возможности двумерных и трехмерных солитонов конденсата Бозе–Эйнштейна, в том числе с размерами, существенно меньшими длины волны де Бройля, – атомными “иглами” и “пулями”, соответственно. Следует отметить, что солитоны атомарного конденсата столь малых размеров не только представляют общефизический интерес, но и были бы весьма важны для приложений к атомной нанолитографии.

В уравнении Гросса–Питаевского для волновой функции конденсата нелинейность, вызванная межатомным взаимодействием, имеет локальный харак-

тер, хотя в исходном уравнении Боголюбова [8] нелинейность описывается интегральным по координатам членом. Учет нелокальности нелинейности принципиально может ограничивать коллапс [9]. В [10] в приближении слабой нелокальности выведено модифицированное уравнение Гросса–Питаевского, включающее соответствующий поправочный член, и показана устойчивость достаточно широких двумерных солитонов в рамках этого уравнения.

В настоящей работе мы исследуем возможность формирования предельно узких квазидвумерных (атомных “игл”) и трехмерных (атомных “пуль”) солитонных состояний конденсата на примере атомов ${}^7\text{Li}$ в состоянии (2,2) (где первое число – полный спин атома, а второе – его проекция) в рамках модифицированного, за счет более полного учета формы потенциала взаимодействия атомов, уравнения Гросса–Питаевского с нелокальной нелинейностью [10]. Выбор состояния (2,2) атомов лития обусловлен тем, что для этого состояния хорошо изучены параметры столкновения атомов. Мы покажем, что поперечный размер атомных “игл” и радиус “пуль” конденсата определяются только характерными пространственными масштабами потенциала взаимодействия атомов и полным количеством атомов в БЭК. Причем изменение длины рассеяния (которая также определяется через параметры потенциала взаимодействия) атомов в постоянном магнитном поле (эффект Фешбаха) дает возможность управления размером такого солитонного состояния БЭК.

Модифицированное уравнение Гросса–Питаевского для одночастичной волновой функции конденсата имеет вид [10]

¹⁾e-mail: rosanov@ilph.spb.su

$$i\hbar \frac{\partial \Phi(\rho, t)}{\partial t} = \left[-\frac{\hbar^2}{2M} \Delta_\rho + N_p (B_0 |\Phi|^2 + B_2 \Delta_\rho |\Phi|^2) \right] \Phi, \quad (1)$$

где M – масса атома, N_p – число атомов в конденсате. Коэффициенты $B_{0,2}$ выражаются через потенциал межатомного взаимодействия $V(r)$, который предполагается сферически симметричным:

$$B_0 = \int V(r) d^3 r = \frac{4\pi \hbar^2 a}{M}, \quad B_2 = \frac{1}{6} \int r^2 V(r) d^3 r. \quad (2)$$

В (2) a – амплитуда S -волны при рассеянии атомов в борновском приближении. Второй нелинейный член в (1) возникает вследствие нелокальности взаимодействия. Волновая функция нормирована:

$$\int |\Phi|^2 d^3 \rho = 1. \quad (3)$$

При рассмотрении двумерных структур число атомов N_p в (1) следует заменить на погонное число атомов N_p/L , где L – длина солитона. Это позволяет сохранить единичную нормировку двумерного распределения в поперечной плоскости.

Введем безразмерные переменные $\rho' = \rho/\rho_c$, $t' = t/t_c$, где $t_c = \sqrt{2M\rho_c/\hbar}$, и будем искать стационарные решения (1) в виде

$$\Phi_d(\rho, t) = \frac{1}{\sqrt{U_d \rho_c}} A_d(\rho') \exp(ikt'), \quad (4)$$

где индекс $d = 2$ или 3 определяет размерность задачи (при $d = 1$ одномерная геометрия рассматривается аналогично), $U_2 = 8\pi|a|N_p/L$, $U_3 = 8\pi|a|N_p$. При этом (1) сводится к уравнению

$$[\Delta_{\rho'} - k + A_d^2 + s \Delta_{\rho'} A_d^2] A_d = 0, \quad (5)$$

где $s = B_2/B_0\rho_c^2$. Знак нелинейности выбран так, чтобы длина рассеяния a была бы отрицательной, тогда (5) имеет солитонные решения (имеются в виду светлые солитоны). Заметим, что при $s = 0$ (локальная нелинейность) масштабный множитель ρ_c произволен, что отражает масштабную инвариантность решения. Для случая $s > 0$ задача сводится к случаю $s = 1$ введением масштабного множителя

$$\rho_c = \sqrt{B_2/B_0}. \quad (6)$$

Солитонные (локализованные) решения уравнения (5) в двумерном ($d = 2$) и трехмерном ($d = 3$) случаях найдены численно. На рис.1 представлена зависимость пропорциональной числу атомов N_p ве-

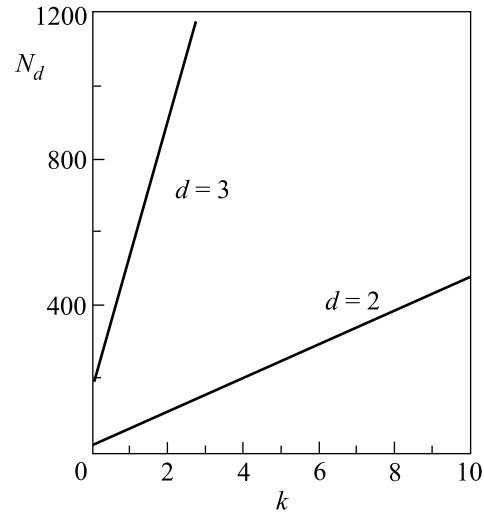


Рис.1. Зависимость пропорциональной числу атомов величины N_d от параметра солитона k для двумерного ($d = 2$) и трехмерного ($d = 3$) солитонов

личины N_d от параметра солитона k :

$$N_2(k) = \int_0^\infty |A_2(\rho')|^2 d^2 \rho' = \frac{8\pi|a|N_p}{L}, \quad (7)$$

$$N_3 = \int_0^\infty |A_3(\rho')|^2 d^3 \rho' = \frac{8\pi|a|N_p}{\rho_c}.$$

Видно, что критерий Вахитова–Колоколова устойчивости солитонов $\partial N/\partial k > 0$ [11] удовлетворяется и в двумерном, и в трехмерном случаях. Напомним, что в случае локальной нелинейности $s = 0$ этот критерий не выполняется ни для двумерных, ни для трехмерных солитонов ($N_2 = N_2^c = 8\pi|a|N_p^c/L = 11.7$, $dN_2/dk = 0$, $dN_3/dk < 0$). Приведенные зависимости подтверждают устойчивость двумерного солитона, которая была доказана аналитически в [10] в случае малых k , и показывают, что нелокальность стабилизирует и трехмерные сферически симметричные солитоны. На рис.2 представлена зависимость безразмерной эффективной полуширины двумерных и трехмерных солитонов от величины N :

$$w_d^2 = \int_0^\infty \rho'^2 |A(\rho')|^2 d^d \rho' / N_d. \quad (8)$$

Вертикальная штриховая линия отвечает локальной нелинейности и двумерной геометрии. Горизонтальная пунктирная прямая показывает асимптотику для нелокальной нелинейности при $N, k \rightarrow \infty$. Можно по-

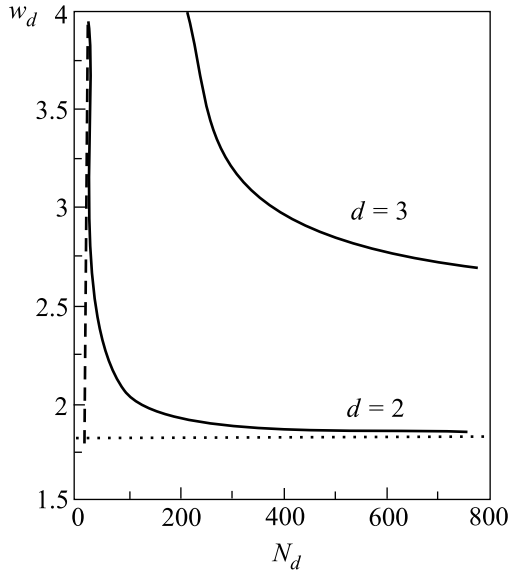


Рис.2. Зависимость безразмерной эффективной полуширины солитона w_d от величины N_d для двумерного ($d = 2$) и трехмерного ($d = 3$) солитонов. Вертикальная штриховая прямая отвечает приближению локальной нелинейности при $d = 2$. Горизонтальная пунктирная прямая показывает асимптотическое значение полуширины $w_2(\infty) = 1.83$ ($d = 2$)

казать, что при этом профиль солитона описывается функцией Бесселя нулевого порядка J_0 ($s = 1$):

$$A(\rho') = \begin{cases} k^{1/2} \sqrt{1 - J_0(\rho')/J_0(\rho'_1)}, & \rho' < \rho'_1, \\ 0, & \rho' > \rho'_1. \end{cases} \quad (9)$$

Величина $\rho'_1 = 3.837$ определяется из условия $J_1(\rho'_1) = 0$. При этом асимптотическое значение безразмерной полуширины $w_2(\infty) = 1.83$.

Для перехода к размерным величинам следует воспользоваться значениями коэффициентов $B_{0,2}$ (3). Однако при использовании стандартного потенциала межатомного взаимодействия типа Леннарда–Джонса оба интеграла в (3) формально расходятся в пределе малых r . Причина очевидна – при столкновении частицы не сближаются на расстояния меньше, чем некий радиус, значение которого определяется отталкивающей частью потенциала и энергией столкновения. Наиболее простой способ обойти это противоречие – это введение конечного радиуса обрезания r_{tr} , значение которого мы определим с помощью первого из уравнений (2) по известной длине рассеяния a .

Рассмотрим триплетное столкновение атомов лития. Потенциал Леннарда–Джонса имеет вид

$$V(r) = D \left(\frac{1}{r^{12}} - \frac{1}{r_0^6 r^6} \right), \quad (10)$$

где расстояние, на котором потенциал обращается в нуль, $r_0 = 6.4$ а.е., а величина $D/r_0^6 = 1.39 \cdot 10^3$ а.е. [12]. Первое из уравнений (2) дает следующее соотношение

$$\int_{r_{tr}}^{\infty} V(r) r^2 dr = \frac{D}{9} \left(\frac{1}{r_{tr}^9} - \frac{3}{r_{tr}^3} \right) = \frac{\hbar^2}{M} a. \quad (11)$$

Вводя переменную $x = (r_0/r_{tr})^3$, мы получим кубическое уравнение

$$x^3 - 3x = \frac{9r_0^9 \hbar^2 a}{MD} = -3.6 \cdot 10^{-3}. \quad (12)$$

При вычислении константы в правой части уравнения использовано значение длины рассеяния $a = -27$ а.е. Из (12) видно, что радиус обрезания

$$r_{tr} \approx \frac{r_0}{3^{1/6}} = 0.83r_0 = 5.32 \text{ а.е.} \quad (13)$$

и слабо зависит от длины рассеяния. В то же время, длина рассеяния резко меняется при небольшом изменении потенциала межатомного взаимодействия. Корень уравнения (12), отвечающий большим r_{tr} , не имеет физического смысла, так как при S -рассеянии расстояние минимального сближения $\sim r_0$. Избыток кинетической энергии, позволяющей сталкивающимся атомам достигнуть расстояния $t_{tr} < r_0$, возникает именно из-за конечности расстояния минимального сближения [4].

Теперь мы можем рассчитать масштабный множитель ρ_c , определенный формулой (6):

$$I_2 = \int_{r_{tr}}^{\infty} r^4 V dr = D \left(\frac{1}{7r_{tr}^7} - \frac{1}{r_0^6 r_{tr}} \right) = -143 \text{ а.е.} \quad (14)$$

При этом

$$\rho_c^2 = \frac{I_2 M}{6\hbar^2 |a|} = 1.1 \cdot 10^4 \text{ а.е.} \quad (15)$$

Таким образом, величина $\rho_c = 100$ а.е. = 53 А. Отметим, что интеграл I_2 слабо зависит от длины рассеяния, так что масштабный множитель $\rho_c \sim 1/|a|^{1/2}$.

При найденных параметрах минимальная полуширина двумерного солитона конденсата атомов ${}^7\text{Li}$ в состоянии (2,2) (см. рис.2) будет $w_p \approx 1.83\rho_c \approx 100 \text{ А} = 10 \text{ нм}$. Управлять величиной N_2 можно, меняя длину рассеяния (см. (7)) с помощью постоянного магнитного поля. Как видно из рис.2, достаточно малая ширина достигается при $N_2 \geq 100$. При

этом для практически минимального сужения сигарообразный конденсат длиной 100 мкм должен содержать $3 \cdot 10^5$ атомов, ввиду чего концентрация атомов $n \approx 1.3 \cdot 10^{19} \text{ см}^{-3}$. При таких высоких концентрациях происходит быстрое уменьшение частиц в конденсате вследствие переворота спинов в парных столкновениях. Характерное время распада конденсата

$$\tau_r = \left| \frac{1}{n} \frac{dn}{dt} \right|^{-1} = (2n\langle\sigma V\rangle)^{-1} = 8 \text{ мкс.} \quad (16)$$

Здесь $\langle\sigma V\rangle = 5 \cdot 10^{-15} \text{ см}^3/\text{с}$ – скорость процесса, рассчитанная в [13]. Столь малое время жизни солитонного состояния конденсата может вызвать значительные трудности его экспериментальной реализации. Радикально можно изменить ситуацию, используя конденсат из атомов ${}^7\text{Li}$ в состоянии (1,1). Длина рассеяния в этом случае $|a| = 1/6 \cdot 10^{-8} \text{ см}$ [2], то есть минимальная полуширина пучка $\sim 30 \text{ нм}$, но характерное время убывания атомов определяется трехчастичными столкновениями, так как парные столкновения, связанные с переходами в возбужденное состояние сверхтонкой структуры, невозможны энергетически. Это время, согласно [14], равно

$$\tau_r' = (1.44Vr_c^5n^2)^{-1}, \quad (17)$$

где V – средняя скорость атомов, r_c – эффективный радиус трехчастичного столкновения. Положив $r_c \approx |a|$, получим $\tau_r \sim 40 \text{ с}$.

Близкое к предельному сужению трехмерных солитонных конденсатов ${}^7\text{Li}$ в состоянии (2,2) может быть достигнуто при существенно более низких концентрациях атомов. Действительно, из рис.2 видно, что при $N_3 = 250$ полуширина солитона $w_3\rho_c = 18 \text{ нм}$ (при минимальной полуширине 13 нм). При этом солитон содержит ~ 40 атомов, а концентрация атомов $n = 1.4 \cdot 10^{18} \text{ см}^{-3}$, что на порядок ниже концентрации в двумерном солитоне. Соответственно время распада конденсата из-за парных столкновений $\tau_r = 80 \text{ мкс}$.

Таким образом, поперечный размер двумерных и трехмерных солитонов конденсата Бозе–Эйнштейна щелочноземельных атомов может достигать $\sim 20\text{--}60 \text{ нм}$, что делает такие атомные “иглы” и “пули” перспективными для применений в атомной нанолитографии. Действительно, предельный размер структур, получаемых с помощью методов оптической фотолитографии, составляет $\sim 120\text{--}150 \text{ нм}$, и только технология вакуумного ультрафиолета, возможно, позволит уменьшить этот размер до 80 нм. В то же время, использование таких методов, как фокусировка предварительно

охлажденных атомов в узлах стоячей световой волны [15] или рассеяние волновых атомных пакетов на периодическом потенциале [16], ведет к строго периодическому характеру получаемой структуры. В результате указанные методы формирования периодического профиля представляют интерес, вообще говоря, не для собственно нанолитографии, а для формирования сверхрешеток со строгой периодичностью легирования. Предложенный вариант нанолитографии с помощью атомных “игл” и “пули”, напротив, позволяет получать любой рисунок на поверхности образца, а простейшие оценки времени экспозиции показывают, что для практического использования такого метода достаточно частоты следования $\sim 10^2$ солитонов/с. Возможность формирования последовательности солитонов конденсата Li продемонстрирована в эксперименте [2].

Авторы благодарны В. Ферсу (W. Firth) и А. Аспекту (A. Aspect) за полезные и стимулирующие обсуждения. Работа поддержана грантами ИНТАС # 2001-0855, Российского фонда фундаментальных исследований # 01-02-17242 и # 02-02-17686 и # УР.01.01.040.

1. Л. П. Питаевский, УФН **168**, 641 (1998).
2. K. E. Strecker, G. B. Partridge, A. G. Truscott, and R. G. Hulet, Nature **417**, 150 (2002).
3. T. Bourdel, L. Khaykovich, F. Schreck et al., IQEC'2002 Techn. Digest, Moscow, June 2002, p. 54.
4. K. Burnett, M. Edwards, and C. W. Clark, Physics Today, December 1999, p. 37.
5. С. Н. Власов, В. И. Таланов, Самофокусировка волн, Н.Новгород: ИПФ РАН, 1997.
6. В. Е. Семенов, Н. Н. Розанов, Н. В. Высотина, ЖЭТФ **116**, 458 (1999).
7. Н. Н. Розанов, Н. В. Высотина, А. Г. Владимиров, ЖЭТФ **118**, 1307 (2000).
8. Н. Н. Боголюбов, Изв. АН СССР, Сер. физ. **11**, 77 (1947).
9. С. К. Турицын, Теор. мат. физ. **64**, 226 (1985).
10. N. N. Rosanov, A. G. Vladimirov, D. V. Skryabin, and W. J. Firth, Phys. Lett. **A293**, 45 (2002).
11. Н. Г. Вахитов, А. А. Колоколов, Изв. вузов. Радиофизика **16**, 1020 (1973).
12. R. Cote, A. Dalgarno, and M. J. Jamieson. Phys. Rev. **A50**, 399 (1994).
13. A. J. Moerdijk and B. J. Verhaar, Phys. Rev. **A53**, R19 (1996).
14. F. T. Smith, J. Chem. Phys. **36**, 248 (1962).
15. W. R. Anderson, C. C. Bradley, J. J. McClelland, and R. J. Celotta, Phys. Rev. **A59**, 2476 (1999).
16. Atom Interferometry, Ed. P. R. Berman, New York: Acad. Press, 1997.