

О ферми-жидкостных эффектах в модели Хаббарда

Р. О. Зайцев

Российский научный центр “Курчатовский институт”, 123182 Москва, Россия

Поступила в редакцию 25 апреля 2007 г.

После переработки 28 мая 2007 г.

Изучаются свойства электронной системы с предельно сильным электрон-электронным взаимодействием. Получено уравнение состояния, вычислена температурная и концентрационная зависимость гидродинамического звука и магнитной восприимчивости. Обнаружена низкотемпературная область неустойчивости, соответствующая расслоению на фазы, которая расположена внутри широкой области куперовской неустойчивости. Уравнение для нуль-звуковых колебаний получено с учетом существенной анизотропии энергетического спектра.

PACS: 71.10.Ay, 71.10.Fd, 71.10.Hf

Основные постулаты, на которых основана теория ферми-жидкости Ландау [1], которые фактически сводятся к предположению о существовании слабозатухающих и слабовзаимодействующих квазичастиц, подчиняющихся статистике Ферми, находят формальное обоснование введением одночастичной гриновской функции, имеющей полюсную особенность. При этом основные ферми-жидкостные эффекты были рассчитаны на основе дополнительного предположения о существовании взаимнооднозначной связи между частичными и квазичастичными состояниями. В модели Хаббарда это соответствие заведомо отсутствует, поскольку уже в нулевом приближении возникают перестановочные соотношения, отличающиеся от известных антикоммутиационных соотношений, относящихся к идеальному газу квазичастиц.

Последовательное изучение модели Хаббарда показывает, что в области достаточно низких температур удается получить полюсную функцию Грина $G_\omega(\mathbf{p})$, найти спектр возбуждений, а также обнаружить остаточное (кинематическое) взаимодействие, приводящее к слабому затуханию соответствующих возбуждений [2]. Перестановочные соотношения, соответствующие X-операторам Хаббарда, приводят к возникновению новых физических величин $f_{1,2}^\sigma$, определяющих средние числа заполнения, связанные с наличием нефермижидкостных перестановочных соотношений. Используя эти соображения, можем рассмотреть все явления, связанные с наличием взаимодействия в модели Хаббарда, и сравнить их с результатами теории Ландау.

Согласно общим термодинамическим соотношениям, квадрат скорости звука s в низкотемпературном пределе выражается через производную хими-

ческого потенциала μ по плотности частиц n : $mc^2 = \partial p / \partial n = n \partial \mu / \partial n$. Вычисление производной плотности числа частиц по химическому потенциалу находим с помощью дифференцирования уравнения состояния $n = n(\mu, T)$. Это последнее соотношение находим с помощью вариации одночастичной функции Грина $D_\omega(\mathbf{p})$, которая выражается через произведение динамической функции Грина $G_\omega(\mathbf{p})$ на конечной множитель f . В предельном случае бесконечной энергии Хаббарда это соотношение вместе с уравнением состояния, записанное без учета внешнего магнитного поля, имеет следующий вид:

$$D_\omega(\mathbf{p}) = G_\omega(\mathbf{p})f, \quad n = 2fT \sum_{\omega, \mathbf{p}} e^{i\omega\delta} G_\omega(\mathbf{p}), \quad (1)$$

$$f = 1 - n/2, \quad \omega = (2k + 1)\pi T,$$

где δ – бесконечно малая положительная постоянная, T – температура.

Уравнение Дайсона определяет функцию Грина $G_\omega(\mathbf{p})$ через собственно энергетическую часть Σ и фурье-компоненты интеграла перескока $t(\mathbf{p})$. Ограничиваясь однопетлевым приближением, получим:

$$G_\omega(\mathbf{p}) = (i\omega - ft(\mathbf{p}) - \Sigma + \mu)^{-1}, \quad (2)$$

$$\Sigma = -T \sum_{\omega, \mathbf{p}} t(\mathbf{p})G_\omega(\mathbf{p}).$$

Здесь, как и в теории ферми-жидкости, функция Грина определяется только полюсным слагаемым без учета конечного времени жизни, которое возникает, начиная с двухпетлевого приближения. Знак во втором слагаемом правой части определяем с помощью поправки первого приближения.

Поскольку в нашем приближении собственно-энергетическая часть не зависит ни от частоты, ни

от импульса, уравнение состояния (1) и его вариацию можно записать в явном виде через спектр возбуждений $\xi_{\mathbf{p}} = ft(\mathbf{p}) - \Sigma - \mu$:

$$\begin{aligned} n &= 2f \sum_{\mathbf{p}} n_F(\xi_{\mathbf{p}}), \\ \delta n &= 2\delta f \sum_{\mathbf{p}} n_F(\xi_{\mathbf{p}}) + 2f \sum_{\mathbf{p}} n'_F(\xi_{\mathbf{p}}) \delta \xi_{\mathbf{p}}, \end{aligned} \quad (3)$$

где $n_F(\xi_{\mathbf{p}})$ и $n'_F(\xi_{\mathbf{p}})$ – распределение Ферми и ее производная.

Вариация энергии возбуждений выражается через вариацию концевго множителя, а также вариацию собственно-энергетической части:

$$\begin{aligned} \delta \xi_{\mathbf{p}} &= \delta ft(\mathbf{p}) + \delta \Sigma - \delta \mu, \\ \delta \Sigma &= - \sum_{\mathbf{p}} t(\mathbf{p}) n'_F(\xi_{\mathbf{p}}) \delta \xi_{\mathbf{p}}, \quad \delta f = -\frac{1}{2} \delta n. \end{aligned} \quad (4)$$

Удобно ввести обозначения:

$$K = \sum_{\mathbf{p}} n_F(\xi_{\mathbf{p}}), \quad R_k = \sum_{\mathbf{p}} t^k(\mathbf{p}) n'_F(\xi_{\mathbf{p}}),$$

после чего находим следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} (1 + K + fR_1) \delta n - 2fR_0 \delta \Sigma &= -2fR_0 \delta \mu, \\ -R_2 \delta n + 2(1 + R_1) \delta \Sigma &= 2R_1 \delta \mu. \end{aligned} \quad (5)$$

Отсюда находим производную, которая обобщает известную формулу Ландау [1]:

$$n \frac{\partial \mu}{\partial n} = \frac{n}{-2fR_0} \{1 + K + R_1(1 + K + f) - f[R_0R_2 - R_1^2]\}. \quad (6)$$

Для нахождения спиновой магнитной восприимчивости запишем уравнение для определения плотности частиц с заданной проекцией спина σ :

$$\begin{aligned} n^\sigma &= f^\sigma \sum_{\mathbf{p}} n_F(\xi_{\mathbf{p}}^\sigma), \quad \xi_{\mathbf{p}}^\sigma = f^\sigma t(\mathbf{p}) + \Sigma^\sigma - \sigma H - \mu, \\ \Sigma^\sigma &= - \sum_{\mathbf{p}} t(\mathbf{p}) n_F(\xi_{\mathbf{p}}^{-\sigma}) \quad f^\sigma = n_0 + n^\sigma. \end{aligned} \quad (7)$$

Средние числа заполнения пустых состояний n_0 не зависят от приложенного магнитного поля H , поэтому $\delta n_0 = 0$. Все остальные вариации, входящие в (7), меняют знак при изменении знака проекции спина: $\delta f^\sigma = -\delta f^{-\sigma} = \delta n^\sigma$, $\delta \xi_{\mathbf{p}}^{-\sigma} = -\xi_{\mathbf{p}}^\sigma$, $\delta \Sigma^{-\sigma} = -\delta \Sigma^\sigma$. В результате имеем уравнения, выражающие δf^σ и $\delta \Sigma^\sigma$ через δH :

$$\begin{aligned} \delta f^\sigma &= \delta f^\sigma \sum_{\mathbf{p}} n_F(\xi_{\mathbf{p}}^\sigma) + f^\sigma \sum_{\mathbf{p}} n'_F(\xi_{\mathbf{p}}^\sigma) \delta \xi_{\mathbf{p}}^\sigma, \\ \delta \Sigma^\sigma &= \sum_{\mathbf{p}} t(\mathbf{p}) n'_F(\xi_{\mathbf{p}}^\sigma) \delta \xi_{\mathbf{p}}^\sigma. \end{aligned} \quad (8)$$

К этим уравнениям следует добавить вариацию энергии возбуждений, а также определение вариации магнитного момента M , отнесенного к единице объема:

$$\begin{aligned} \delta \xi_{\mathbf{p}}^\sigma &= \delta f^\sigma t(\mathbf{p}) + \delta \Sigma^\sigma - \sigma \delta H, \\ \delta M &= \sum_{\sigma} \sigma \delta n^\sigma = \sum_{\sigma} \sigma \delta f^\sigma. \end{aligned} \quad (9)$$

Решая эти уравнения и переходя к пределу $\delta H \rightarrow 0$, находим обратную восприимчивость [3], которая выражается через те же величины, что и квадрат скорости звука:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\chi} &= \left(\frac{\partial M}{\partial H} \right)^{-1} = \\ &= \frac{1}{-2fR_0} \{1 - K - R_1(1 - K + f) - f[R_0R_2 - R_1^2]\}. \end{aligned} \quad (10)$$

Поскольку $-R_0$ – величина, пропорциональная плотности одночастичных состояний, то первое слагаемое в (6) и (10) соответствует квадрату скорости звука и обратной магнитной восприимчивости идеального газа. Величина R_1 пропорциональна борновской амплитуде кинематического взаимодействия, так что третье слагаемое следует интерпретировать как фермижидкостную поправку. Остальные слагаемые можно отнести к нефермижидкостным (хаббардовским) поправкам.

Возникновение ферромагнитного упорядочения находим из условия обращения в нуль обратной магнитной восприимчивости (10). Точно так же условие возникновения неоднородных состояний (страйпов) совпадает с условием обращения в нуль квадрата скорости звука (6). Уравнения состояний (1) устанавливают связь между химическим потенциалом, плотностью и температурой, так что с помощью соотношений (1), (6) и (10) можно получить области существования упорядоченных фаз в переменных “концентрация–температура”.

Интегралы, входящие в наши уравнения, зависят от величины $t(\mathbf{p})$, так что имеет смысл ввести затравочную плотность состояний $\rho_0(\epsilon) = \sum_{\mathbf{p}} \delta(\epsilon - t(\mathbf{p}))$, после чего запишем все величины в виде однократных интегралов:

$$\begin{aligned} K &= \int \rho_0(\epsilon) n_F(\xi(\epsilon)) d\epsilon, \\ R_k &= \int \rho_0(\epsilon) \epsilon^k n'_F(\xi(\epsilon)) d\epsilon, \quad \xi(\epsilon) = f\epsilon - \mu. \end{aligned} \quad (11)$$

Здесь используется новый химический потенциал, фактически равный $\mu - \Sigma$, а интегрирование производится в той области, где отлична от нуля затравочная плотность состояний.

В предельном случае $T = 0$ все величины в правой части зависят от f и от параметра $x = \mu/f$:

$$\begin{aligned} K &= \int_{\epsilon_{\min}}^x \rho_0(\epsilon) d\epsilon, & R_0 &= -\frac{1}{f} \rho_0(x), \\ R_1 &= -\frac{x}{f} \rho_0(x), & R_0 R_2 &= R_1^2. \end{aligned} \quad (12)$$

Уравнение состояния также записываем в параметрической форме:

$$\frac{n}{2f} = K = \int_{\epsilon_{\min}}^x \rho_0(\epsilon) d\epsilon, \quad f = 1 - \frac{n}{2}. \quad (13)$$

Подстановка (12) в формулу для квадрата скорости звука показывает, что структурная неустойчивость может возникать только в области положительных x , когда амплитуда рассеяния R_1 становится отрицательной. При этом оказывается, что соответствующее критическое значение либо вообще не достигается, либо оказывается достаточно близким к единице.

Так для для случая постоянной плотности состояний – модель плоской зоны: $\rho_0(\epsilon) = \theta(1 - \epsilon^2)/2$ имеем $x_c = 0.82$, что, согласно уравнению состояния, соответствует $n_c = 0.95$ ¹⁾. В трехмерном случае, когда плотность состояний на верхнем краю зоны обращается в нуль, скорость звука остается положительной. Исключение составляет случай ГЦК решетки, для которой в области максимально возможной энергии $\epsilon = 2$ плотность состояний обращается в бесконечность по корневому закону, в то время как для минимально возможной энергии $\epsilon = -6$ плотность состояний обращается в нуль по корневому закону. Соответствующую интерполяционную плотность состояний удобно записать в виде

$$\rho_{0e}(\epsilon) = \frac{1}{4\pi} \frac{\sqrt{6 + \epsilon}}{\sqrt{2 - \epsilon}}, \quad (14)$$

после чего получим:

$$\begin{aligned} K(x) &= \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arcsin \left(\frac{x}{4} + \frac{1}{2} \right) + \frac{x^2 + 4x - 12}{4\pi(6+x)(2-x)}, \\ x_c &= 1.47, \quad n_c = 0.81. \end{aligned} \quad (15)$$

Таким образом, область электронной структурной неустойчивости находится вблизи $n = 1$: в модели плоской зоны при $0.95 < n < 1$, для ГЦК решетки при $0.81 < n < 1$.

¹⁾ Аналогичный результат ($n_c = 0.93 \pm 0.01$) был получен в [4] методом слэив-бозонов (slave boson representation, $U = \infty$) для двумерной квадратной решетки с перескоками к ближайшим соседям.

Что же касается ферромагнитной неустойчивости, то здесь ситуация иная. Величина R_1 пропорциональна амплитуде рассеяния с противоположными спинами, так что ферромагнитное упорядочение может появиться только для положительных и достаточно больших значений R_1 , что в нашей модели соответствует высокой плотности состояний при отрицательных значениях x .

Можно показать, что в модели плоской зоны ферромагнетизм вообще не возникает [3]. В трехмерной ситуации ферромагнитную неустойчивость можно обнаружить только для дырочной ГЦК решетки. Для нахождения критической концентрации снова запишем интерполяционную формулу (14), но с заменой $6 + \epsilon \rightarrow 2 - \epsilon$ и $2 - \epsilon \rightarrow 6 + \epsilon$, после чего находим явный вид уравнения состояния, а затем с помощью соотношения (10) получим критическую концентрацию: $x_c = -1.31$, $n_c = 0.539$.

Особенно простой вид приобретают наши соотношения для случая постоянной плотности состояний – модель плоской зоны: $\rho_0(\epsilon) = \theta(1 - \epsilon^2)/2$. При этом все интегралы вычисляются в явном виде, а уравнение состояния приобретает вид

$$\frac{n}{2f} = K = \frac{T}{f^2} \ln \left\{ \frac{1 + \exp[(f + \mu)/T]}{1 + \exp[(-f + \mu)/T]} \right\}, \quad (16)$$

откуда находим явный вид химического потенциала:

$$\mu = T \ln \left[\operatorname{sh} \left(\frac{n}{2T} \right) \right] - T \ln \left[\operatorname{sh} \left(\frac{1-n}{T} \right) \right], \quad (17)$$

после чего, приравнявая к нулю правую сторону (6), получим температурную область существования структурной неустойчивости, см. рис.1.

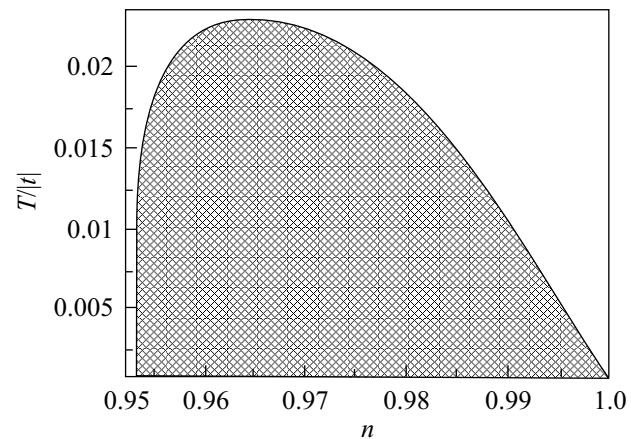


Рис.1. Область существования электронной структурной неустойчивости для модели плоской зоны и бесконечной энергии Хаббарда

Следующий фермижидкостной эффект связан с возможностью построения левой части кинетическо-

го уравнения [5]. Предполагая, что конечной множителем $f(\mathbf{r}) = 1 - n(\mathbf{r})/2$ зависит от координат, а $\xi_p = ft(\mathbf{p}) - \mu$, можно написать:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{r}} \frac{\partial \xi}{\partial \mathbf{p}} - \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{p}} \frac{\partial \xi}{\partial \mathbf{r}} = \\ & = \frac{\partial \varphi}{\partial t} + f \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{r}} \frac{\partial t(\mathbf{p})}{\partial \mathbf{p}} - t(\mathbf{p}) \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{p}} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} = \hat{S}t(f). \end{aligned} \quad (18)$$

В качестве функции нулевого приближения будем использовать распределение Ферми – то, что обращает в нуль интеграл столкновений. В качестве следующего приближения будем писать произведение $\exp(i\mathbf{q}\mathbf{r} - i\omega t)$ на неизвестную функцию от импульса $\psi(\mathbf{p})$. При этом следует помнить, что по-прежнему

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} = -\frac{1}{2} \frac{\partial n}{\partial \mathbf{r}} = -i\mathbf{q} \exp(i\mathbf{q}\mathbf{r} - i\omega t) \sum_{\mathbf{p}} \psi(\mathbf{p}). \quad (19)$$

Подставляя нулевое и первое приближения в левую и правую стороны кинетического уравнения (18), получим:

$$\begin{aligned} & -i\omega \psi(\mathbf{p}) + f \left(i\mathbf{q} \frac{\partial t(\mathbf{p})}{\partial \mathbf{p}} \right) \psi(\mathbf{p}) + \\ & + t(\mathbf{p}) \left(i\mathbf{q} \frac{\partial \varphi_0}{\partial \mathbf{p}} \right) \sum_{\mathbf{p}'} \psi(\mathbf{p}') = \hat{L}(\psi(\mathbf{p})). \end{aligned} \quad (20)$$

В области высоких частот ω , превышающих обратное время релаксации, когда можно пренебречь правой частью (20), имеем:

$$\psi(\mathbf{p}) = t(\mathbf{p}) \left(\mathbf{q} \frac{\partial \varphi_0}{\partial \mathbf{p}} \right) \sum_{\mathbf{p}'} \psi(\mathbf{p}') \left[\omega + i\delta - f \left(\mathbf{q} \frac{\partial t(\mathbf{p}')}{\partial \mathbf{p}'} \right) \right]^{-1}. \quad (21)$$

Производя суммирование левой и правой частей по импульсу \mathbf{p} , получим дисперсионное уравнение:

$$1 = \sum_{\mathbf{p}} \left\{ t(\mathbf{p}) \left(\mathbf{q} \frac{\partial \varphi_0}{\partial \mathbf{p}} \right) \left[\omega + i\delta - f \left(\mathbf{q} \frac{\partial t(\mathbf{p})}{\partial \mathbf{p}} \right) \right]^{-1} \right\}. \quad (22)$$

Поскольку функция распределения нулевого приближения равна функции Ферми $\varphi_0(\mathbf{p}) = n_F(\xi_p)$, то вместо (22) можно написать:

$$\begin{aligned} 1 & = \sum_{\mathbf{p}} \left\{ t(\mathbf{p}) (\mathbf{q}\mathbf{v}_p) n'_F(\xi_p) [\omega + i\delta - (\mathbf{q}\mathbf{v}_p)]^{-1} \right\}, \\ \mathbf{v}_p & = f \frac{\partial t(\mathbf{p})}{\partial \mathbf{p}} \end{aligned} \quad (23)$$

– скорость частицы с энергией $ft(\mathbf{p})$, δ – малая положительная добавка, имеющая смысл обратного

времени релаксации. Таким образом, мы получили уравнение для нуль-звуковых колебаний с учетом анизотропии спектра.

Уравнение для нуль-звуковых колебаний можно получить независимо от постулатов теории ферми-жидкости. Для этого достаточно написать уравнение для нахождения вершинной части $\Gamma(p_1, p_2 | p_3, p_4)$ в предельном случае малой передачи импульса $\mathbf{q} = \mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_1 = \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_4$, $\Omega = \omega_3 - \omega_1 = \omega_2 - \omega_4$. Записанное в температурной диаграммной технике, это уравнение имеет вид (см. рис.2)

$$\begin{aligned} \Gamma(p_1, p_2 | p_3, p_4) & = \tilde{\Gamma}(p_1, p_2, p_3, p_4) - \\ & - T \sum_{\omega', \mathbf{p}'} \tilde{\Gamma}(p_1, \mathbf{p}', p_3, \mathbf{p}' - \mathbf{q}) G_{\omega'}(\mathbf{p}') G_{\omega' - \Omega}(\mathbf{p}' - \mathbf{q}) \times \\ & \times \Gamma(p_2, \mathbf{p}' - \mathbf{q} | \mathbf{p}', p_4). \end{aligned} \quad (24)$$

В общем случае $\tilde{\Gamma}(p_1, p_2, p_3, p_4)$ – неприводимая вершинная часть относительно разрезания вдоль двух линий противоположного направления с мало отличающимися импульсами, которую мы будем считать равной амплитуде рассеяния двух частиц.

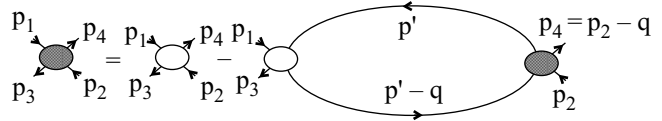


Рис.2. Уравнение для нуль-звуковых колебаний

При бесконечной энергии электрон-электронного взаимодействия для модели Хаббарда в качестве амплитуды рассеяния следует использовать функцию, зависящую только от конечных импульсов [2]:

$$\tilde{\Gamma}(p_1, p_2, p_3, p_4) = -t(\mathbf{p}_3) - t(\mathbf{p}_4) = \tilde{\Gamma}_0(\mathbf{p}_3, \mathbf{p}_4), \quad (25)$$

где $t(\mathbf{p}) = \sum_{\mathbf{r}} \tilde{t}_{\mathbf{r}} \exp(-i\mathbf{p}\mathbf{r})$, а $\tilde{t}_{\mathbf{r}}$ – интеграл перескока.

Поскольку $\tilde{\Gamma}$ и Γ не зависят от частотных переменных $\omega_k = (2k + 1)\pi T$, то можно вычислить сумму по частотам, относящимся к произведению двух функций Грина:

$$\begin{aligned} L_q(\mathbf{p}') & = T \sum_{\omega} G_{\omega}(\mathbf{p}') G_{\omega - \Omega}(\mathbf{p}' - \mathbf{q}) = \\ & = T \sum_{\omega'} \frac{1}{(i\omega - \xi_{\mathbf{p}'}) (i\omega - i\Omega - \xi_{\mathbf{p}' - \mathbf{q}})} = \\ & = \frac{n_F(\xi_{\mathbf{p}' - \mathbf{q}}) - n_F(\xi_{\mathbf{p}'})}{i\Omega + \xi_{\mathbf{p}' - \mathbf{q}} - \xi_{\mathbf{p}'}}, \end{aligned} \quad (26)$$

где $\xi_{\mathbf{p}'}$ – спектр возбуждений, вычисленный без учета затухания.

Условие возникновения нуль-звуковых колебаний есть условие разрешимости однородной системы уравнений, которая соответствует общей неоднородной системе (26):

$$\begin{aligned} & \Gamma(p_1, p_2 | p_3, p_4) = \\ & = - \sum_{\mathbf{p}'} \tilde{\Gamma}(p_1, \mathbf{p}', p_3, \mathbf{p}' - q) L_q(\mathbf{p}') \Gamma(p_2, \mathbf{p}' - q | \mathbf{p}', p_4) = \\ & = t(\mathbf{p}_3) \sum_{\mathbf{p}'} L_q(\mathbf{p}') \Gamma(p_2, \mathbf{p}' - q, p_2, |\mathbf{p}', p_4) + \\ & + \sum_{\mathbf{p}'} t(\mathbf{p}' - \mathbf{q}) L_q(\mathbf{p}') \Gamma(p_2, \mathbf{p}' - q | \mathbf{p}', p_4). \end{aligned} \quad (27)$$

Таким образом, решение уравнения (24) зависит от своего третьего аргумента \mathbf{p}_3 , а также от параметра \mathbf{q} : $\Gamma(p_1, p_2 | p_3, p_4) = U_{\mathbf{q}} + V_{\mathbf{q}} t(\mathbf{p}_3)$.

Подставляя это в левую и правую сторону (27) и разделяя переменные, получим:

$$\begin{aligned} U_{\mathbf{q}} &= \sum_{\mathbf{p}'} t(\mathbf{p}' - \mathbf{q}) L_q(\mathbf{p}') [U_{\mathbf{q}} + V_{\mathbf{q}} t(\mathbf{p}')], \\ V_{\mathbf{q}} &= \sum_{\mathbf{p}'} L_q(\mathbf{p}') [U_{\mathbf{q}} + V_{\mathbf{q}} t(\mathbf{p}')]. \end{aligned} \quad (28)$$

Условие разрешимости этой системы имеет вид:

$$L_1^+(\mathbf{q}) + L_1^-(\mathbf{q}) + L_0(\mathbf{q}) L_2(\mathbf{q}) - L_1^+(\mathbf{q}) L_1^-(\mathbf{q}) = 1, \quad (29)$$

где после простых преобразований

$$\begin{aligned} L_0(\mathbf{q}) &= \sum_{\mathbf{p}} \frac{n_F(\xi_{\mathbf{p}-\mathbf{q}/2}) - n_F(\xi_{\mathbf{p}+\mathbf{q}/2})}{i\Omega + \xi_{\mathbf{p}-\mathbf{q}} - \xi_{\mathbf{p}}}, \\ L_1^{\pm}(\mathbf{q}) &= \sum_{\mathbf{p}} t(\mathbf{p} \pm \mathbf{q}/2) \frac{n_F(\xi_{\mathbf{p}-\mathbf{q}/2}) - n_F(\xi_{\mathbf{p}+\mathbf{q}/2})}{i\Omega + \xi_{\mathbf{p}-\mathbf{q}/2} - \xi_{\mathbf{p}+\mathbf{q}/2}}, \end{aligned} \quad (30)$$

$$\begin{aligned} L_2(\mathbf{q}) &= \\ & = \sum_{\mathbf{p}} t(\mathbf{p} + \mathbf{q}/2) t(\mathbf{p} - \mathbf{q}/2) \frac{n_F(\xi_{\mathbf{p}-\mathbf{q}/2}) - n_F(\xi_{\mathbf{p}+\mathbf{q}/2})}{i\Omega + \xi_{\mathbf{p}-\mathbf{q}/2} - \xi_{\mathbf{p}+\mathbf{q}/2}}. \end{aligned} \quad (31)$$

В длинноволновом пределе, когда можно пренебречь зависимостью от \mathbf{q} в амплитуде рассеяния, имеем:

$$L_0(\mathbf{q}) = \sum_{\mathbf{p}} \frac{-n'_F(\xi_{\mathbf{p}})(\mathbf{q}\mathbf{v})}{i\Omega - (\mathbf{q}\mathbf{v})}, \quad (32)$$

$$L_1^{\pm}(\mathbf{q}) = \sum_{\mathbf{p}} t(\mathbf{p}) \frac{-n'_F(\xi_{\mathbf{p}})(\mathbf{q}\mathbf{v})}{i\Omega - (\mathbf{q}\mathbf{v})},$$

$$L_2(\mathbf{q}) = \sum_{\mathbf{p}} t^2(\mathbf{p}) \frac{-n'_F(\xi_{\mathbf{p}})(\mathbf{q}\mathbf{v})}{i\Omega - (\mathbf{q}\mathbf{v})}, \quad \mathbf{v} = \frac{\partial \xi_{\mathbf{p}}}{\partial \mathbf{p}}. \quad (33)$$

В пределе низких температур $-n'_F(\xi_{\mathbf{p}})$ превращается в $\delta(\xi_{\mathbf{p}})$. Если заметить, что энергия возбуждений зависит от импульса только через $t(\mathbf{p})$ ($\xi_{\mathbf{p}} = ft(\mathbf{p}) + \Sigma - \mu$), тогда множители $t(\mathbf{p})$ выходят из-под знака суммирования в виде t^* , которое определяется условием $\xi_{\mathbf{p}} = \xi(t^*) = 0$. В результате оказывается, что $L_0 L_2 = L_1^2$, а условие возникновения нуль-звуковых колебаний приобретает известный вид:

$$1 = 2L_1(\mathbf{q}) = 2t^* \sum_{\mathbf{p}} \frac{\delta(\xi_{\mathbf{p}})(\mathbf{q}\mathbf{v})}{\omega + i\delta - (\mathbf{q}\mathbf{v})}. \quad (34)$$

Здесь произведено аналитическое продолжение $i\Omega \rightarrow \omega + i\delta$ в верхнюю плоскость частотной переменной.

Уравнение для вершинной части, записанное при малом суммарном импульсе \mathbf{s} , также определяется через амплитуду рассеяния (25):

$$\begin{aligned} \Gamma_{s_0}(p_1, p_2 | p_3, p_4) &= \tilde{\Gamma}_0(\mathbf{p}_3, \mathbf{p}_4) - \\ &- \sum_{\mathbf{p}'} \tilde{\Gamma}(\mathbf{p}', \mathbf{s} - \mathbf{p}') C_s(\mathbf{p}') \Gamma_{s_0}(\mathbf{p}', \mathbf{s} - \mathbf{p}' | p_3, p_4). \end{aligned} \quad (35)$$

При нулевой суммарной частоте и импульсе: $C_0(\mathbf{p}') = T \sum_{\omega} G_{\omega}(\mathbf{p}') G_{-\omega}(-\mathbf{p}') = \text{th}(\xi_{\mathbf{p}'}/2T)/2\xi_{\mathbf{p}'}$, так что вершинная часть обращается в бесконечность, начиная с некоторой конечной температуры $T = T_c$, которую находим из условия

$$\begin{aligned} 1 &= - \sum_{\mathbf{p}} \tilde{\Gamma}_0(\mathbf{p}, -\mathbf{p}) \frac{\text{th}(\xi_{\mathbf{p}}/2T_c)}{2\xi_{\mathbf{p}}} = \sum_{\mathbf{p}} t_{\mathbf{p}} \frac{\text{th}(\xi_{\mathbf{p}}/2T_c)}{\xi_{\mathbf{p}}} = \\ &= 2x\rho_0(x) \int_0^{\bar{\epsilon}} \frac{\text{th}(\xi/2T_c)}{\xi} d\xi. \end{aligned} \quad (36)$$

Это соотношение определяет эффективную константу БКШ: $\Lambda = 2x\rho_0(x)$, где $x = \mu/f$ находим из уравнения состояния (13). Отсюда можно заключить, что область существования куперовской неустойчивости соответствует широкой области положительных значений химического потенциала [2, 6]²). Соответствующая область концентраций значительно превышает область существования неоднородных состояний, которые могут проявляться только в узкой области вблизи концентраций порядка единицы.

Таким образом можно утверждать, что фермижидкостные эффекты проявляются также и в модели Хаббарда в той части фазовой диаграммы, которая относится к металлу и расположена вдали от точки фазового перехода в диэлектрическое состояние.

²В работе автора [3] Λ была вычислена для произвольных значений энергии Хаббарда U .

Аномальные свойства модели Хаббарда определяются свойствами амплитуды рассеяния возбуждений с противоположным знаком проекции спина. В области малых концентраций эта амплитуда положительна, так что система имеет повышенную магнитную восприимчивость и при достаточно большой плотности состояний переходит в ферромагнитное состояние. С повышением плотности амплитуда рассеяния электронов с противоположными спинами становится отрицательной, что приводит к появлению куперовской неустойчивости и переходу в сверхпроводящее состояние. При концентрациях, близких к единице, происходит существенное уменьшение модуля всестороннего сжатия, так что при достаточно большой затравочной плотности состояний электронная система переходит в неоднородное состояние.

Кинетическое уравнение имеет тот же общий вид, что и теории ферми-жидкости. В соответствии с этим удается получить уравнение для определения спектра высокочастотных нуль-звуковых колебаний. При этом интеграл столкновений может быть получен по теории возмущений в рамках двухпетлевого приближения, откуда следует известная оценка обратного времени жизни: $\hbar/\tau \approx T^2 \nu_0(x)$, $\nu_0(x)$ – плотность состояний на уровне Ферми.

Таким образом, предлагаемый метод X -операторов показывает, что в рамках одно- и двухпетлевого приближений модель Хаббарда обладает всеми общими физическими свойствами ферми-жидкости. К этим же выводам приходит группа авторов [4], использующих метод слэив-бозонов. Однако необходимо помнить о существенных различиях между различными подходами при написании уравнения состояния, когда возникает необходимость введения концевых множителей $f^\sigma = n_0 + n^\sigma$.

Работа была поддержана Министерством Образования РФ. Грант РНП № 2.1.1.9451.

1. Л. Д. Ландау, ЖЭТФ **30**, 1058 (1956); **32**, 59 (1957); **35**, 97 (1958).
2. Р. О. Зайцев, Phys. Lett. A **134**, 199 (1988).
3. Р. О. Зайцев, ЖЭТФ **125**, 891 (2004).
4. A. Tandon, Z. Wang, and G. Kotliar, Phys. Rev. Lett. **83**, 2046 (1999).
5. В. П. Силин, ЖЭТФ **23**, 641 (1952).
6. Р. О. Зайцев, *Диаграммные методы в теории сверхпроводимости и ферромагнетизма*, Москва: Изд-во УРСС, 2004. Перевод *Diagrammatic methods in the theory of superconductivity and ferromagnetism*, Moscow: URSS, 2007.