Письма в ЖЭТФ, том 46, вып. 2, стр. 65 – 67 *25 июля 1987 г.*

ПЛОТНОСТЬ СОСТОЯНИЙ ФРАКТАЛЬНЫХ СТРУКТУР С ДАЛЬНОДЕЙСТВИЕМ

А.Г.Мальшуков

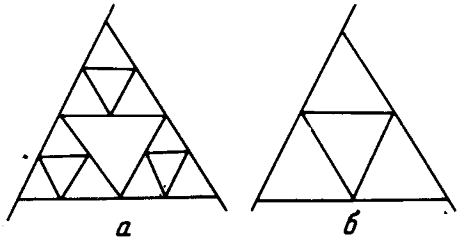
На примере треугольного ковра Серпинского с взаимодействием между узлами вида $r^{-\beta}$ показано, что при β выше некоторого критического значения β_c плотность состояний определяется универсальным показателем (спектральной размерностью), как и при короткодействии. Однако при $\beta < \beta_c$ показатель зависит от β. Он найден путем ϵ-разложения вблизи β_c.

Рассмотрим уравнение

$$E\psi_i = - \Sigma V_{ij}\psi_j, \tag{1}$$

где волновые функции определены на узлах структуры, обладающей масштабной симметрией (фрактала) [1]. Как установлено для перколяционных систем [2,3], а также широкого класса упорядоченных фрактальных структур [3–5], в случае короткодействующего взаимодействия V_{ij} плотность низкочастотных состояний (вблизи дна зоны E_b) определяется универсальным показателем-спектральной размерностью d_s: $\rho(E) \sim (E - E_b)^{\mu}$, где $\mu = (d_s/2) - 1$. То же справедливо и для систем, обладающих трансляционной симметрией, где d_s совпадает с размерностью пространства. С другой стороны известно, что в последнем случае дальнодействие приводит к изменению μ. В частности, в двумерной системе $(d_s = 2)$ $\mu = 0$ для короткодействующего взаимодействия, тогда как, например, в двумерной решетке дипольных осцилляторов, ориентированных по нормали к плоскости $(V_{ij} \sim r_{ij}^{-3})$, $\mu = 1$. Это обусловлено изменением закона дисперсии от $E - E_b \sim k^2$ (k – волновой вектор) в случае короткодействия, к $E - E_b \sim k$ при $V_{ij} \sim r_{ij}^{-3}$. Естественно возникает вопрос о роли дальнодействия в низкочастотном поведении $\rho(E)$ фрактальных структур. Этот вопрос имеет отношение к широкому кругу задач. К нему относится, в частности, задача о поглощении света в больших кластерах малых металлических частиц в области частот собственных дипольных плазменных колебаний этих частиц, или об экситонных состояниях макромолекул. Эта же проблема возникает в задаче о переносе энергии при степенной зависимости времени перескока возбуждения от расстояния между узлами.

Ниже рассматривается скалярное уравнение (1), определенное на узлах треугольного ковра Серпинского (см. рисунок). Взаимодействие V_{ij} имеет вид $V_{ij} = \alpha_{ij} + \gamma_{ij}$, где $\alpha_{ij} = 1$, когда i и j принадлежат ближайшим узлам и 0 во всех остальных случаях, а $\gamma_{ij} = \gamma |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|^{-\beta}$. Также как и в случае $\gamma_{ij} = 0$ [3–5] ниже применяется рекурсионная процедура, заключающаяся в исключении переменных ψ_i на внутренних узлах (см. рисунок) с перенормировкой параметров уравнения (1). При этом использована теория возмущений по γ. Оказалось,что при $\beta < \beta_c$ имеется две фиксированные точки. Одна из них тривиальная $\gamma^* = 0$, что соответствует короткодействию, а другая нетривиальная, в которой $\gamma^* \neq 0$. При $\beta = \beta_c - \epsilon$ ($\epsilon \ll 1$) $\gamma^* \sim \epsilon$, что оправдывает использование теории возмущений по γ. Картина аналогична ϵ-разложению в теории фазовых переходов [6].



а *б*

При перенормировке γ_{ij} не сохраняет степенно́го вида на расстояниях $r_{ij} \sim 1$. Однако, на больших расстояниях с точностью $\sim r_{ij}^{-1}$ степенна́я зависимость сохраняется. В этой области в окрестности фиксированной точки ($\gamma_{ij} = 0, E = -4$) для перенормированных значений имеем $\gamma'_{ij} = 15\,\gamma_{ij}$. Подставляя $\gamma_{ij} = \gamma r_{ij}^{-\beta}$, получим $\gamma' = \gamma\, 15/2^{\beta}$. Отсюда следует, что при $\beta > \beta_c = \ln 15/\ln 2$ константа γ стремится к фиксированной точке $\gamma^* = 0$. Таким образом, система ведет себя как при короткодействующем взаимодействии. Имея в виду, что для двумерного ковра Серпинского $d_s = 2\ln 3/\ln 5$, а фрактальная размерность $d_f = \ln 3/\ln 2$ [1], получим

$$\beta_c = d_f + 2\,\frac{d_f}{d_s}. \tag{2}$$

Это же соотношение нетрудно получить и для n-мерного ковра Серпинского. Из простых соображений следует, что оно имеет место и для фрактальных структур общего вида, в том числе и неупорядоченных. Действительно, в системе, обладающей трансляционной симметрией, β_c определяется сходимостью суммы $\Sigma r_{ij}^{\,2-\beta}$, появляющейся при разложении правой части уравнения (1) по малым градиентам ψ_i. В случае фрактальных структур разложение по градиентам не столь тривиально, поскольку ψ_i осциллирует в сколь угодно малых масштабах. Можно воспользоваться понятием фрактальной производной [7]. При этом указанная сумма имеет вид $\Sigma r_{ij}^{\,\nu-\beta}$. Показатель фрактальной производной ν однозначно связан с d_s [2], откуда и следует соотношение (2).

При $\beta < \beta_c$ точка $\gamma^* = 0$ оказывается неустойчивой. Рекурсионные соотношения при $\gamma \ll 1$ имеют вид

$$\begin{aligned} W' &= 5\,W(1 - a\gamma),\\ \gamma' &= \frac{15}{2^{\beta}}\,\gamma(1 - a\gamma), \end{aligned} \tag{3}$$

где $W = E + 4 + \dfrac{1}{N}\sum\limits_{ij}\gamma_{ij}$ (N – число узлов). Уравнение $W = 0$ определяет нижнюю границу спектра собственных состояний в линейном по γ_{ij} приближении. Соотношения (3) справедливы в окрестности точки $W = 0$. Численный параметр $a \sim 1$. Он определяется взаимодействиями на малых расстояниях, что связано с быстрой сходимостью сумм вида $\Sigma\gamma_{ij}$. При учете взаимодействий в области $|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j| \leq 2\sqrt{3}$, что соответствует ближайшим дальним соседям в решетке *б* на рисунке, величина $a \approx 0{,}4$. Разумеется на этих расстояниях величины γ_{ij} не имеют степенно́го вида. Их значения в фиксированной точке были найдены из анализа полной системы рекурсионных соотношений в указанной ближней области. Как следует из (3) в нетривиальной фиксированной точке $W^* = 0$ и $\gamma^* = \epsilon \ln 2/a$, где $\epsilon = \beta_c - \beta \ll 1$. Плотность состояний получается из уравнения (см. [3]): $\rho(W')dW' = 2^{d_f}\rho(W)dW$. Отсюда, используя (3) получим $\rho \sim w^{(\tilde{d}_s/2)-1}$, где эффективная спектральная размерность

$$\tilde{d}_s = d_s \left(1 - \frac{d_s}{2d_f}\,\epsilon\right)^{-1}. \tag{4}$$

Следует отметить, что для произвольной фрактальной структуры это же уравнение можно было бы получить непосредственно из уравнения (1), предположив, что ψ_i характеризуются иерархией масштабов, возрастающих вплоть до самого большого, который, в каком-то смысле, является аналогом длины волны в трансляционно симметричной системе.

Ранее дальнодействие рассматривалось на линиях Коха в иерархической модели (взаимодействуют ближайшие соседи на каждой из ступеней иерархии) [8]. Нетрудно показать, что на треугольном ковре Серпинского подобная модель имеет точное решение, также как и в [8]. Однако второй универсальный показатель спектральной размерности отсутствует.

Литература

1. *Mandelbrot B.B.* The Fractal Geometry of Nature, Freeman, San Francisco, 1982.
2. *Alexander S., Orbach R.* J. Physique Lett., 1982, **43**, L-625.
3. *Rammal R., Toulouse G.* J. Physique Lett., 1983, **44**, L-13.
4. *Rammal R.* Phys. Rev., 1983, **B28**, 4871.
5. *Domany E., Alexander S., Bensimon D., Kadanoff L.P.* Phys. Rev., 1983,**B28**, 3110.
6. *Паташинский А.З., Покровский В.Л.* Флуктуационная теория фазовых переходов. М.: Наука, 1982.
7. *Зельдович Я.Б., Соколов Д.Д.* УФН, **146**, 497.
8. *Maritan A., Stella A.* Phys. Rev. B, 1986, **34**, 456.

Институт спектроскопии
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
20 апреля 1987 г.