Письма в ЖЭТФ, том 46, вып. 2, стр. 81 – 84 *25 июля 1987 г.*

НУЛИ В СПЕКТРЕ ФЕРМИОНОВ В СВЕРХТЕКУЧИХ СИСТЕМАХ КАК ДЬЯВОЛЬСКИЕ ТОЧКИ

Г.Е.Воловик

Щель в энергетическом спектре фермионных возбуждений в сверхтекучих ферми-системах может обращаться в нуль в точках или линиях на ферми-поверхности. Однако только те нули устойчивы по отношению к внешним возмущениям, которые являются дьявольскими точками (или линиями) спектра и тем самым обладают топологическим зарядом.

Если в сверхтекучей ферми-жидкости щель в спектре $E(\mathbf{k})$ фермионных возбуждений ($\mathbf{k}$ – импульс или квазиимпульс фермионов) обращается в нуль в точках или на линиях в импульсном пространстве $\mathbf{k}$, то такая жидкость занимает промежуточное положение между "классическими" сверхтекучими системами, где нули в щели отсутствуют, и нормальной ферми-жидкостью. В такой системе нормальное движение низкоэнергетических фермионов существенно даже при $T = 0$, приводя к ряду особенностей. Так в сверхтекучем ^{3}He-*A*, где щель обращается в нуль в двух точках на ферми-поверхности, нормальные фермионы являются киральными и их взаимодействие с параметром порядка приводит к явлениям, известным в квантовой теории поля как киральная аномалия [1]. Предполагается, что нули щели имеются и в некоторых сверхпроводниках, принадлежащих тяжелофермионным системам (см. обзор [2]). Существование нулей является следствием нетривиального типа куперовского спаривания, при котором калибровочная инвариантность не полностью нарушена [3]. Причем существование и тип нулей диктуется симметрией упорядоченного состояния, т. е. классом сверхтекучести или сверхпроводимости [3, 4].

Важным вопросом является устойчивость нулей по отношению к внешним возмущениям, нарушающим симметрию когерентного состояния. В то время как одни нули исчезают при сколь угодно малых возмущениях, что меняет низкотемпературную термодинамику системы, другие нули выживают при любых не очень сильных возмущениях. Так не все нули выживут в системах с тяжелыми фермионами, если например, приложить упругое напряжение, либо выйти за рамки однозонного приближения и учесть процессы переброса, в то время как стабильность точечных нулей в ^{3}He-A обеспечивается топологичей параметра порядка $\Delta_{ss'}(\mathbf{k})$ в импульсном пространстве [5] (индекс s в ^{3}He нумерует спиновые состояния). Однако для более общего случая тяжелых фермионов, где существенно кристаллическое поле и индекс s нумерует не только спиновые состояния, но и зоны, развитая в [5] теория топологической устойчивости нулей неприменима. Теорию можно обобщить, используя общие свойства пересечения ветвей спектра, найденные фон-Нейманом и Вигнером [6] и вновь привлекшие внимание в связи с появлением фазы Берри [7]: а именно, стабильны лишь те нули в спектре, которые являются так называемыми дьявольскими точками спектра.

Дьявольские точки (см. также [8], где они изучались в физике ядра) это исключительные точки в спектре в том смысле, что в них происходит касание двух различных ветвей спектра. Мы рассматриваем общий случай возмущений, не сохраняющих симметрию, тем самым ветви спектра не различаются по симметрии и, следовательно, не могут пересекаться. Возможно лишь касание ветвей и то только если размерность пространства параметров, от которых зависит спектр, $\geqslant 3$ [6]. Поскольку размерность импульсного пространства $\mathbf{k}$ равна 3, то две ветви $E_i(\mathbf{k})$ и $E_j(\mathbf{k})$ могут касаться в точках импульсного пространства. Точка касания топологически устойчива: под действием внешних возмущений она может лишь перемещаться в импульсном пространстве, либо аннигилировать при встрече с точкой, имеющей противоположный топологический заряд. Топологический заряд определяется следующим образом [13].

Спектр фермионов это собственные значения $N \times N$ эрмитовой матрицы $H_{ij}(\mathbf{k})$, зависящей от $\mathbf{k}$ как от параметра, где N – число зон, включая спиновые переменные, а также с учетом "изоспина" в пространстве Боголюбова – Намбу, т. е. частичных и дырочных состояний. В частном случае сверхтекучего ^{3}He имеем $N = 4$ и

$$H_{ij} = \begin{pmatrix} \epsilon_{ss'}(\mathbf{k}) & \Delta_{ss'}(\mathbf{k}) \\ \Delta^{+}{}_{ss'}(\mathbf{k}) & -\epsilon^{*}_{ss'}(-\mathbf{k}) \end{pmatrix}, \tag{1}$$

что соответствует четырем ветвям спектра (при диагональном и вещественном $\epsilon_{ss'} = \epsilon(\mathbf{k})\delta_{ss'}$ это $E = \pm\sqrt{\epsilon^2 + |\Delta_\uparrow|^2}$, $E = \pm\sqrt{\epsilon^2 + |\Delta_\downarrow|^2}$).

Ортонормированный набор собственных функций $\psi_{ia}(\mathbf{k})$ матрицы H_{ij} (a – нумерует функции, i – компоненты функции в столбце) образует унитарную матрицу, диагонализующую H_{ij}:

$$H_{ij}(\mathbf{k}) = \sum_a \psi^{+}_{ja}(\mathbf{k}) E_a(\mathbf{k})\, \psi_{ia}(\mathbf{k}). \tag{2}$$

Этот набор осуществляет отображение пространства $\mathbf{k}$ в пространство унитарных матриц $U(N)$, причем умножение $\psi_{ia}(\mathbf{k})$ на фазовые множители $\exp(i\varphi_a(\mathbf{k}))$ не меняет (2), что соответствует факторизации $U(N)$ по $U^N(1)$. Следовательно область изменения R собственных функций ψ_{ia} представляет собой фактор-пространство $R = U(N)/U^N(1)$, имеющее нетривиальную гомотопическую группу $\pi_2(R) = Z^{N-1}$. Следовательно, возможны особые точки отображения пространства параметров $\mathbf{k}$ в R, характеризующиеся $N-1$ целочисленным зарядом. Удобно однако ввести N зарядов N_a с условием $\Sigma N_a = 0$.

В случае общего положения только два заряда, например, N_1 и N_2 отличны от нуля и принимают значения 1 и -1, посольку особенности с большими значениями зарядов расщепляются при малых шевелениях на эти простейшие элементы. Этот простейший нуль соответствует контакту двух ветвей спектра в той точке $\mathbf{k}_0$, где отображение имеет особенность: $E_1(\mathbf{k}_0) = E_2(\mathbf{k}_0)$. Поскольку топологический заряд сохраняется при слабых шевелениях, точка $\mathbf{k}_0$ может лишь смещаться, но не исчезать. Топологические инварианты для точек слияния ветвей спектра были впервые введены Новиковым [12].

Наиболее интересны для сверхтекучих и сверхпроводящих состояний такие дьявольские точки, в которых происходит контакт спектров частиц и дырок, т. е. положительных и отрицательных уровней, например, $E_1 < 0$ с $E_2 > 0$. В таких дьявольских точках,лежащих на ферми-поверхности, спектр фермионных квазичастиц с необходимостью обращается в нуль. Вблизи таких нулей, как и в общем случае касания двух произвольных ветвей [7], фермионы описываются двухуровневым гамильтонианом. Этот 2×2 гамильтониан линеен по $\mathbf{k} - \mathbf{k}_0$ и в общем виде выражается следующим образом через двухрядные матрицы Паули σ_α:

$$H = \vec{\sigma} \cdot \mathbf{m}(\mathbf{k}), \qquad m_\alpha(\mathbf{k}) = e^i_\alpha (k_i - k_{0i}) \tag{3}$$

с коэффициентами e^i_α, зависящими от деталей спектра. Это соответствует гамильтониану безмассового кирального фермиона, движущегося в поле электромагнитного векторного потенциала $\mathbf{A} = \mathbf{k}_0$ и гравитационного поля триад e^i_α ($\mathbf{A}$ и e^i_α зависят от пространственных координат $\mathbf{r}$, если внешнее возмущение пространственно неоднородно).

Как и остальные дьявольские точки, точка $\mathbf{k}_0$ в (3) является "магнитным" монополем в k-пространстве [7]. При обходе по контуру C в пространстве $\mathbf{k}$ любое решение уравнения (3) приобретает геометрический фазовый множитель $\gamma(C)$, называемый фазой Берри, которая выражается через интеграл по поверхности, опирающейся на этот замкнутый контур, от "магнитного" поля $\mathbf{H}(\mathbf{k})$:

$$\gamma(C) = \iint_C dS \cdot \mathbf{H}(\mathbf{k}), \qquad H_i(\mathbf{k}) = \frac{1}{4|\mathbf{m}|^3} e_{ijk}\, \mathbf{m} \cdot \left[\frac{\partial \mathbf{m}}{\partial k_j}, \frac{\partial \mathbf{m}}{\partial k_k}\right]. \tag{4}$$

В точке $\mathbf{k} = \mathbf{k}_0$ поле $\mathbf{H}(\mathbf{k})$ имеет "магнитный" полюс

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{k}} \circ \mathbf{H}(\mathbf{k}) = 2\pi\delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}_0). \tag{5}$$

Из-за этого монополя собственные функции гамильтониана (3) не могут быть определены глобально для всех $\mathbf{k}$: при любом их определении для каждого из решений всегда найдется дираковская струна – вихревая линия, исходящая из монополя, где это решение не определено, поскольку при обходе по бесконечно малому контуру C вокруг этой линии решение приобретает фазу Берри $\gamma(C) = 2\pi$.

Это и приводит к явлению киральной аномалии в сверхтекучем ^{3}He-A и возможно в некоторых из тяжелофермионных систем (на вихревую особенность в фазе $\Phi(\mathbf{k})$ у боголюбовских функций $u_\mathbf{k}$ и $v_\mathbf{k}$, составляющих собственную функцию уравнения (3) в ^{3}He-A, обращалось внимание еще в [9], в [5] эти вихревые линии в поле Φ подробно исследовались, причем было замечено, что физические результаты зависят не от положения линий, а от положения монополя, из которого они исходят и названного в [5] буджумом на ферми-поверхности. Это естественно, поскольку выбор дираковской струны произволен и зависит от выбора калибровки).

Нули типа дьявольских точек – единственные нули, выживающие при возмущениях произвольного типа. Их существование сопровождается ферро- или антиферромагнетизмом [3], так в ^{3}He-A с ними связан орбитальный ферромагнетизм. Кроме точек касания ветвей в 3-мерном пространстве (касание коразмерности 3) возможны при определенной симметрии касания коразмерности $n \neq 3$, определяемые группой $\pi_{n-1}(R)$. Линии касания ветвей в 3-мерном пространстве ($n = 2$) возникают, например, для вещетсвенных матриц H_{ij} [6, 7, 10]; в в этом случае $R = SO(N)$ и имеет нетривиальную $\pi_1(R)$ при всех N. Если касаются ветви с $E < 0$ и с $E > 0$, то на этих линиях щель в спектре с необходимостью обращается в нуль. Такого рода линии могут существовать в тяжелофермионных системах, если внешние воздействия не нарушают требуемую симметрию. Нули в спектре фермионов коразмерности $n = 4$ ("дьявольский инстантон") появляются, например, в доменной стенке, соединяющей два различных вакуума в ^{3}He-B: энергия квазичастиц обращается в нуль в точке 4-мерного пространства $(\mathbf{k}, x)$, где x – координата вдоль нормали к стенке [11]. Нули более высокой коразмерности возможны в топологических объектах, имеющих форму линий ($n = 5$) или точек ($n = 6$).

Итак из найденных в [3] нулей щели в различных классах сверхпроводимости только те сохраняются при учете процессов переброса, которые соответствуют дьявольским линиям и точкам, лежащим на ферми-поверхности. Остальные приобретают щель, хотя и малую по параметру T_c/ϵ_F. Если же под влиянием внешнего воздействия или спонтанно дьявольская точка или линия уходит с поверхности $E = 0$, т. е. с ферми-поверхности, то одна из ветвей обязательно пересекает ферми-поверхность, что приводит к конечной плотности состояний и, следовательно, к линейной по T теплоемкости при самых низких температурах. Так происходит в ^{3}He-A при наличии сверхтекучей скорости, либо при отличном от нуля $\mathrm{rot}\,\mathbf{A} \equiv \mathrm{rot}\,\mathbf{k}_0$ (см. [1] и ссылки там).

Я благодарен С.П. Новикову за ценные обсуждения.

Литература

1. *Воловик Г.Е.* ЖЭТФ, 1987, **92**, 2116; J. Low Temp. Phys., 1987, **67**, 301.
2. *Lee P.A., Rice T.M., Serene J.W. Sham L.J., Wilkins J.W.* Comments Cond. Matt. Phys., 1986, **12**, 99.
3. *Воловик Г.Е., Горьков Л.П.* ЖЭТФ, 1985, **88**, 1412.
4. *Blount E.I.* Phys. Rev., 1985, **B32**, 2935.
5. *Воловик Г.Е., Минеев В.П.* ЖЭТФ, 1982, **83**, 1025.
6. *Von Neumann J., Wigner E.P.* Phys. Z., 1929, **30**, 467.
7. *Berry M.V.* Proc. Roy. Soc. London, 1984, **A392**, 45.
8. *Nikam R.S., Ring P.* Phys. Rev. Lett., 1987, **58**, 980; *Nikam R.S., Ring P., Canto L.F.* Phys. Lett., B, 1987, **185**, 269.
9. *Leggett A.J., Takagi S.* Ann. Phys. 1978, **110**, 353.
10. *Арнольд В.И.* "Математические методы классической механики", М.: Наука, 1979, Добавление 10.
11. *Salomaa M.M., Volovik G.E.* "Cosmic" domain walls in superfluid ^{3}He-B: instantons in (k, r)-space. Preprint of Helsinki University of Technology, TKK-F-A610.
12. *Новиков С.П.* ДАН СССР, 1981, **257**, 538.
13. *Avron J.E., Seiler R., Simon B.* Phys. Rev. Lett., 1983, **51**, 51.

Институт теоретической физики им. Л.Д.Ландау
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
5 июня 1987 г.