Письма в ЖЭТФ, том 46, вып. 4, стр. 129 – 132 *25 августа 1987 г.*

ВЫСШИЕ ИНТЕГРАЛЫ ДВИЖЕНИЯ В ДВУМЕРНЫХ МОДЕЛЯХ ТЕОРИИ ПОЛЯ С НАРУШЕННОЙ КОНФОРМНОЙ СИММЕТРИЕЙ

А.Б.Замолодчиков

Показано, что "минимальные" модели двумерной конформной теории поля, возмущенные полем $\Phi_{(1,3)}$ или $\Phi_{(1,2)}$ имеют высшие интегралы движения.

Критические точки статистических систем описываются, как известно, неподвижными точками ренормгруппы [1], т.е. конформно-инвариантными решениями теории поля. В последние годы построен ряд точных решений конформной теории поля (КТП) в двумерном пространстве (см. обзор [2]). Располагая точными корреляционными функциями КТП, можно исследовать окрестность неподвижной точки по теории возмущений (ТВ). Возмущение представляется в виде $\sum_a \lambda^a \int \Phi_a(x) d^2x$, где Φ_a – некоторые бесспиновые (мы рассматриваем только изотропные теории) локальные поля, лежащие в операторной алгебре A [2,3] невозмущенной КТП, а λ^a – размерные постоянные – "константы связи". Если поле Φ_a имеет правую и левую размерности (Δ_a, Δ_a) [2,3] скалярная константа $\lambda^a \sim R^{\Delta_a - 1}$ (R – длина); мы будем говорить, что λ^a имеет размерности $(1-\Delta_a, 1-\Delta_a)$, так что возмущение безразмерно. Конформная инвариантность невозмущенной теории равносильна существованию при $\lambda^a = 0$ бесконечного набора интегралов движения (ИД) $L_n, \bar{L}_n$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ – генераторов конформных преобразований, образующих алгебру Вирасоро [3] и выражаемых через компоненты $T = T^{zz}$ и $\bar{T} = T^{\bar{z}\bar{z}}$ бесследного (при $\lambda = 0$) тензора напряжений

$$2\pi i L_n = \oint dz z^{n+1} T(z); \quad 2\pi i \bar{L}_n = \oint d\bar{z} \bar{z}^{n+1} \bar{T}(\bar{z}), \tag{1}$$

где $z = x^1 + ix^2$, $\bar{z} = x^1 - ix^2$, а (x^1, x^2) – декартовы координаты $\mathbb{R}^2$. При $\lambda \neq 0$ конформная инвариантность, вообще говоря, нарушается, и операторы (1) перестают быть ИД. Исключение составляют компоненты импульса $P = L_{-1}$, $\bar{P} = \bar{L}_{-1}$ и момента импульса $M = L_0 - \bar{L}_0$; их сохранение гарантируется евклидовой инвариантностью теории. В данной статье мы покажем, однако, что в ряде случаев возмущенная теория (ВТ) обладает "высшими" коммутативными ИД и является, возможно, вполне интегрируемой.

Операторная алгебра A любой КТП содержит конформный класс [3] единичного оператора $[I] = \mathbb{T} \times \overline{\mathbb{T}}$, где все векторы пространства $\mathbb{T}(\overline{\mathbb{T}})$ получаются применением операторов $L_n(\overline{L}_n)$ с $n < 0$ к I; в частности, $T = L_{-2} I \in \mathbb{T}$. Очевидно, $\mathbb{T} = \bigoplus_{s=0}^{\infty} \mathbb{T}_s$, где любое поле $T_s \in \mathbb{T}_s$ имеет размерности $(s, 0)$ (т.е. спин s). Например, $\mathbb{T}_1 = 0$ (так как $L_{-1} I = 0$), $\mathbb{T}_0$, $\mathbb{T}_2$ и $\mathbb{T}_3$ одномерны (с образующими I, T и $\partial_z T$, соответственно), $\mathbb{T}_4$ содержит, кроме $\partial_z^2 T$, поле $T_4 = (L_{-2}^2 - (3/5) L_{-4}) I$, $\mathbb{T}_5$ натянуто на $\partial_z^3 T$ и $\partial_z T_4$, а $\mathbb{T}_6$ – на $\partial_z^4 T$, $\partial_z^2 T_4$ и

$$T_6^{(1)} = \left(L_{-2}^3 - \frac{1}{3} L_{-3}^2 - \frac{19}{15} L_{-4} L_{-2} - \frac{2}{3} L_{-6}\right) I;$$

$$T_6^{(2)} = \frac{1}{9} \left(- \frac{5}{2} L_{-3}^2 + 4 L_{-4} L_{-2} + \frac{10}{7} L_{-6}\right) I.$$

Поле T_4 появляется в регулярной части операторного разложения $T(z) T(0)$ и может рассматриваться как (регуляризованный) квадрат T: $T_4 \sim : T^2 :$; в том же смысле $T_6^{(1)} \sim : T^3 :$, $T_6^{(2)} \sim : \partial_z T \partial_z T :$. Каждое поле $T_s \in \mathbb{T}_s$ (в частности T_4 и T_6) является "сохраняющимся током": $\partial_{\bar z} T_s = 0$, т.е. $T_s = T_s(z)$, и порождает серию (зависимых) ИД, полиномиально выражаемых через L_n. Ниже показано, что в некоторых случаях часть этих ИД "выживает" в ВТ.

В [3,4] построена серия M_p, $p = 3, 4, 5, \ldots$ "минимальных" унитарных решений КТП, соответствующих значениям $c_p = 1 - (6/p(p+1))$ центрального заряда в алгебре Вирасоро. Операторная алгебра M_p содержит $p(p-1)/2$ конформных классов $[\Phi_{(n,m)}]$, $n = 1, 2, \ldots, p-1$, $m = 1, 2, \ldots, p$; $\Phi_{(p-n,\, p+1-m)} = \Phi_{(n,m)}$, $\Phi_{(1,1)} = I$, причем размерности полей $\Phi_{(n,m)}$ даются формулой Каца [3]. В операторной алгебре M_p имеется подалгебра $A_{(1,*)} = \bigoplus_m [\Phi_{(1,m)}]$, в свою очередь содержащая подалгебру $A_{(1,**)} = \bigoplus_l [\Phi_{(1,2l+1)}]$. Мы рассмотрим два типа ВТ:

$$H_\lambda = H^{(p)} + \lambda \int \Phi(x) d^2 x; \tag{2а}$$

$$H_\mu = H^{(p)} + \mu \int \phi(x) d^2 x, \tag{2б}$$

где в обоих случаях $H^{(p)}$ – действие собственно КТП M_p, $\Phi \equiv \Phi_{(1,3)}$; $\phi \equiv \Phi_{(1,2)}$. Поле $\Phi_{(1,3)}$ ($\Phi_{(1,2)}$) выделено тем, что обладает наименьшей (если исключить единичный оператор) размерностью в $A_{(1,**)}$ в ($A_{(1,*)}$). Поля Φ и ϕ имеют размерности (Δ, Δ) и (δ, δ), соответственно, где $\Delta = 1 - \epsilon$, $\delta = (1/4 - 3\epsilon/8)$; $\epsilon = 2/(p+1)$. Поскольку для всех p $\Delta < 1$, и $\delta < 1$, ТВ для (2а) и (2б) не содержат ультрафиолетовых расходимостей, а ультрафиолетовые асимптотики обеих теорий описываются КТП M_p. Поля Φ и ϕ вырождены и удовлетворяют уравнениям [3]

$$\left(L_{-3} - \frac{2}{\Delta + 1} L_{-1} L_{-2} + \frac{1}{(\Delta + 1)(\Delta + 2)} L_{-1}^3\right) \Phi = 0; \tag{3а}$$

$$\left(L_{-2} - \frac{3}{2(2\delta + 1)} L_{-1}^2\right) \phi = 0. \tag{3б}$$

Сохранение импульса в (2) обеспечивается уравнениями $\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$, т.е.

$$\partial_{\bar z} T = \partial_z \Theta; \quad \partial_z \overline{T} = \partial_{\bar z} \Theta, \tag{4}$$

где $\Theta = - T_\mu^\mu$ – след тензора напряжений, причем $\Theta = \lambda \epsilon \Phi$ в (2а) и $\Theta = \mu(1 - \delta) \Phi$ в (2б). Покажем, что (2а) и (2б) имеют "высшие" ИД.

Рассмотрим сначала (2а). При $\lambda \neq 0$ производная $\partial_{\bar z} T_4$ представляется в виде $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda^k Q_2^{(k)}$, где $Q_2^{(k)}$ – некоторые локальные поля, причем, как видно из структуры ряда ТВ, $Q_2^{(k)} \in A_{(1,**)}$. Поля $Q_2^{(k)}$ должны иметь спин 3 и размерности $(4 - k\epsilon, 1 - k\epsilon)$. Например, $Q_2^{(1)}$ может быть только линейной комбинацией полей $L_{-3}\Phi, L_{-1}L_{-2}\Phi, L_{-1}^{3}\Phi$. Однако ввиду (3а) эти поля линейно зависимы и мы имеем $Q_{2}^{(1)} = \partial_{z}(a_1 L_{-2} + a_2 L_{-1}^{2})\Phi$ (учтено, что $L_{-1} = \delta_{z}$), где a_1, a_2 – постоянные, значения которых сейчас не важны. Далее, $A_{(1,**)}$ вообще не содержит полей с размерностями $(4-k\epsilon, 1-k\epsilon)$ с $k>1$, за исключением случая $k=(p+1)/2$, который возможен только при нечетных p; в этом случае $Q_{2}^{((p+1)/2)} \sim \partial_{z}T$. Следовательно, в ВТ (2а) справедливо точное уравнение

$$\partial_{\bar z}T_4 = \partial_{z}\Theta_2, \tag{5}$$

где $\Theta_2 = \lambda(a_1 L_{-2} + a_2 L_{-1}^{2})\Phi + \lambda^{((p+1)/2)}\alpha T$ ($\alpha = 0$, если $p \in 2\mathbb{Z}$). Точно так же, каждая из производных $\partial_{\bar z}T_{6}^{(i)}$, $i = 1, 2$, имеет вид $\sum_{k=1}^{\infty}\lambda^{k}Q_{4}^{(i)(k)}$, где $Q_{4}^{(i)(k)} \in A_{(1,**)}$ имеет размерности $(6-k\epsilon, 1-k\epsilon)$. Так поля $Q_{4}^{(i)(1)}$ могут содержать кроме полных производных по z (т.е. членов, содержащих L_{-1}), только слагаемые $L_{-5}\Phi$ и $L_{-2}L_{-3}\Phi$, причем второе из них можно исключить с помощью (3а). Следовательно, существует такая линейная комбинация $T_6 = T_{6}^{(1)} + hT_{6}^{(2)}$, что

$$\partial_{\bar z}T_6 = \partial_{z}\Theta_4, \tag{6}$$

где $\Theta_4 = \lambda(b_1 L_{-4} + b_2 L_{-1}^{2}L_{-2} + b_3 L_{-1}^{4})\Phi + \lambda^{((p+1)/2)}(\beta_1 T_4 + \beta_2\partial_{z}^{2}T)$; b и β – постоянные. Более подробное вычисление дает $h = (28+5c_p)/30$, где c_p – значение центрального заряда в M_p. Из (4) – (6) следует, что ВТ (2а) имеет ИД

$$P_{2l+1} = \oint(T_{2l+2}dz + \Theta_{2l}d\bar z), \tag{7}$$

где $l = 0, 1, 2$, причем $P_1 \equiv P$ – "правая" компонента импульса, а ИД (7) с $l = 1, 2$ являются "высшими". Конечно, существуют аналогичные "левые" ИД. Непосредственным вычислением проверяется, что все операторы (7) коммутативны. Можно предполагать, что в (2а) есть бесконечная серия ИД вида (7) с $l = 1, 2, 3, \ldots$, хотя эти операторы с $l>2$ пока не построены. В [5] показано, что модель (2а) с $\lambda>0$ и достаточно большим p имеет конформно инвариантную инфракрасную асимптотику, описываемую КТП M_{p-1}. При $\lambda<0$ нет особых оснований ожидать появления нуля β-функции, так что в такой теории имеется, по-видимому, конечный корреляционный радиус $R_c \sim \lambda^{-1/\epsilon}$ и массивные частицы. Если это так, существование ИД (7) обеспечивает в такой теории упругий характер рассеяния частиц, факторизацию S-матрицы и т.д. [6].

Рассмотрим теперь (2б). Здесь $\partial_{\bar z}T_4$ не может быть полной производной по z из-за наличия члена $L_{-3}\phi$, появляющегося уже в первом порядке по μ. Производные $\delta_{\bar z}T_{6}^{(1)}$ и $\delta_{\bar z}T_{6}^{(2)}$ в первом порядке по μ могут содержать "опасные" (т.е. не сводящиеся к производным по z) члены вида $L_{-5}\phi$, $L_{-3}L_{-2}\phi$, однако второй из них можно исключить ввиду (3б). Следовательно, в (2б) существует поле $T_6' = T_{6}^{(1)} + h'T_{6}^{(2)}$, удовлетворяющее (6) с $T_6 \to T'_6$ и $\Theta_4 \to \Theta'_4 = \mu(b'_1 L_{-4} + b'_2 L_{-1}L_{-3} + b'_3 L_{-1}^{4})\phi + \mu^{[4(p+1)/3]}(\beta'_1 T_4 + \beta'_2\partial_{z}^{2}T)$, причем коэффициенты β' могут отличаться от нуля только если $p+1=0 \pmod 3$. Таким образом, в (2б) имеется "высший" ИД (7) с $l=2$. Мы предполагаем, что модель (2б) содержит бесконечную серию коммутирующих ИД. Так или иначе, уже существования ИД (7) с $l=2$ достаточно, чтобы обеспечить чисто упругий характер рассеяния частиц в (2б).

Отметим, что справедливость рассуждений в предыдущем абзаце не нарушится, если в (2б) взять $\phi = \Phi_{(2,1)}$, так что такая ВТ тоже обладает "высшим" ИД при всех p. В частном случае $p=5$ эта модель описывает трехпозиционную модель Поттса в скейлинговом пределе $T \to T_c$ [8].

Литература

1. *Вильсон К., Когут Дж.* "Ренормализационная группа и ϵ-разложение". М.: Мир, 1975.
2. *Замолодчиков А.Б.* Препринт ИТФ-87-65Р, Киев, 1987.
3. *Belavin A.A., Polakov A.M., Zamolodchikov A.B.* Nucl. Phys., 1984, **B241**, 333.
4. *Friedan D., Qin Z., Shenker S.* Phys. Rev. Lett., 1984, **52**, 1575.

5. *Замолодчиков А.Б.* Письма в ЖЭТФ, 1986, **43**, 565; **ЯФ**, 1987, **46**, 9.
6. *Zamolodchikov A.B., Zamolodchikov Al. B.* Ann. Phys., 120, **253**, 1979.
7. *Polakov A.M.* Phys. Lett., 1977, **72B**, 224.
8. *Dotsenko Vl.S.* Nucl. Phys., 1984, **B235** FS11, p. 54.

Институт теоретической физики им. Л.Д.Ландау.
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
26 июня 1987 г.
