Письма в ЖЭТФ, том 46, вып. 6, стр. 208 – 210 25 *сентября 1987 г.*

ГАМИЛЬТОНОВА СТРУКТУРА АНТИСИММЕТРИЧНОГО ДЕЙСТВИЯ СТРУНЫ

А.А.Желтухин

Дана гамильтонова формулировка динамики струны, описываемой антисимметричным действием.

В последнее время антисимметричное представление действия струн и суперструн [1] активно исследуется [2-4]. Однако последовательный гамильтонов формализм, необходимый для квантования, не построен из-за сложной структуры связей. Попытка [4] продвижения в этом направлении содержит ошибки. Здесь проанализирована структура связей и проведен переход от лагранжевой формулировки антисимметричного действия к гамильтоновой. Полученные связи образуют на скобках Пуассона открытую алгебру.

Действие [1] в D-мерном пространстве $\mathbf{x}$ имеет вид

$$S = \gamma \iint d\tau d\sigma \left\{ \frac{1}{2}(n_i^A \epsilon^{ik} n_k^B)\partial_\mu x_A \,\epsilon^{\mu\nu}\partial_\nu x_B - \frac{1}{2}E^{ik}(\mathbf{n}_i\mathbf{n}_k - \eta_{ik}) \right\}. \tag{1}$$

Связи, вытекающие из определения канонических импульсов для полей $\mathbf{x}$, $\mathbf{n}_i$ и E_{ik} имеют вид

$$\vec{\Phi} = \vec{\mathcal{P}} - \gamma \mathbf{n}_i \epsilon^{ik}(\mathbf{n}_k \mathbf{x}') \approx 0, \quad \vec{\pi}_i \approx 0, \quad \pi_{ik} \approx 0.$$

Гамильтониан равен сумме связей

$$H = \int d\sigma \left\{ \frac{\gamma}{2}E^{ik}(\mathbf{n}_i\mathbf{n}_k - \eta_{ik}) - \mathbf{u}\vec{\Phi} - \mathbf{v}^i\vec{\pi}_i - v^{ik}\pi_{ik} \right\}. \tag{2}$$

Анализ условий непротиворечивости связей (2) приводит к 4 связям первого рода

$$\begin{gathered} Q_0 = (\mathbf{n}_i\mathbf{n}_i - 2)\gamma - 2(\mathbf{n}_i\vec{\Phi})\epsilon^{ik}(\mathbf{n}_k\mathbf{x}')\frac{1}{\mathbf{x}'^2} + 2\frac{1}{x'^2}\vec{\pi}_i\epsilon^{ik}\mathbf{n}'_{k\perp} \approx 0 \\ T_0 = (\vec{\mathcal{P}}\cdot\mathbf{x}') + (\vec{\pi}^i\mathbf{n}'_{i\perp}) \approx 0, \quad \epsilon^{ik}(\vec{\pi}_i\cdot\mathbf{n}_k) \approx 0, \quad \pi_{00} - \pi_{11} \approx 0 \end{gathered} \tag{3}$$

и $4D + 2$ связям второго рода

$$\mathbf{x}'_\perp = \mathbf{x}' - \mathbf{n}_i(\mathbf{n}^i\mathbf{x}') \approx 0, \qquad \vec{\mathcal{P}}_\perp = \vec{\mathcal{P}} - \mathbf{n}_i(\mathbf{n}_i\cdot\vec{\mathcal{P}}) \approx 0, \tag{4}$$

$$(\mathbf{n}_i\mathbf{n}_k) - \eta_{ik} \approx 0, \quad \vec{\pi}_i \approx 0 \tag{5}$$

$$\pi_{00} + \pi_{11} \approx 0, \quad E_{00} + E_{11} \approx 0, \quad E_{01} \approx 0, \quad \pi_{01} \approx 0.$$

Связи (4) явно разрешаются и переменные $\mathbf{n}_0$, $\mathbf{n}_1$ выражаются через $\mathbf{x}'$ и $\vec{\mathcal{P}}$

$$\mathbf{n}_0 = \frac{\vec{\mathcal{P}}}{\sqrt{-\vec{\mathcal{P}}^2}}\operatorname{ch}\Theta + \frac{\mathbf{x}'}{\sqrt{\mathbf{x}'^2}}\operatorname{sh}\Theta,$$

$$\mathbf{n}_1 = \frac{\mathbf{x}'}{\sqrt{\mathbf{x}'^2}}\operatorname{ch}\Theta + \frac{\vec{\mathcal{P}}}{\sqrt{-\vec{\mathcal{P}}^2}}\operatorname{sh}\Theta.$$

Это обстоятельство с учетом связей (5) позволяет исключить из рассмотрения все степени свободы, кроме описываемых парами $\mathbf{x}$, $\vec{\mathcal{P}}$ и E, π, где $E = {}^1/_2\,\mathrm{Sp}\,E_{ik}$ – скалярная плотность на мировом листе, а $\pi = {}^1/_2\,\mathrm{Sp}\,\pi_{ik}$ – соответствующий ей канонический импульс. Гамильтониан (2) после исключения нефизических степеней свободы принимает вид

$$H = \int d\sigma \left\{ u_0 (\acute{\mathbf{x}} \cdot \vec{\mathcal{P}}) + E\left(\sqrt{\frac{-\vec{\mathcal{P}}^2}{\acute{\mathbf{x}}^2}} - \gamma\right) + \dot{E}\pi \right\} \tag{6}$$

причем $\acute{\mathbf{x}}^2 \neq 0$ [1]. Отличные от нуля одновременные скобки Пуассона связей первого рода $T = (\mathbf{x} \cdot \vec{\mathcal{P}}) \approx 0$, $Q = (\sqrt{-\vec{\mathcal{P}}^2 / \acute{\mathbf{x}}^2}) - \gamma \approx 0$ имеют вид

$$\begin{aligned} \{T(\sigma), \ T(\sigma')\} &= [T(\sigma) + T(\sigma')]\,\delta'(\sigma - \sigma'), \\ \{Q(\sigma), \ T(\sigma')\} &= Q'(\sigma)\,\delta(\sigma - \sigma'); \\ \{Q(\sigma), \ Q(\sigma')\} &= \left[T(\sigma)\frac{1}{\acute{\mathbf{x}}^4(\sigma')} + T(\sigma')\frac{1}{\acute{\mathbf{x}}^4(\sigma')} \right] \delta'(\sigma - \sigma'). \end{aligned} \tag{7}$$

Связь Q заменяет вторую связь $\vec{\mathcal{P}}^2 + \gamma^2 \acute{\mathbf{x}}^2 \approx 0$ в формулировке Намбу. Связь Q является одним из корней связи $\vec{\mathcal{P}}^2 + \gamma^2 \acute{\mathbf{x}}^2 \approx 0$, так как $(-\vec{\mathcal{P}}^2 - \gamma^2 \acute{\mathbf{x}}^2) = \acute{\mathbf{x}}^2 \left(\sqrt{\frac{-\vec{\mathcal{P}}^2}{\acute{\mathbf{x}}^2}} + \gamma\right) Q \approx$ ≈ 0. Учитывая, что $-\vec{\mathcal{P}}^2 = \gamma E^{-1}(-\dot{\mathbf{x}}\,\acute{\mathbf{x}}^2 + \acute{\mathbf{x}}(\dot{\mathbf{x}}\,\acute{\mathbf{x}}))$ и $u_0 = (\dot{\mathbf{x}}\,\acute{\mathbf{x}})/\acute{\mathbf{x}}^2$ получим репараметризационно инвариантное действие для H (6) в виде

$$S = \gamma \iint d\tau d\sigma \left\{ \frac{-\Sigma}{E} + E - \sqrt{-\Sigma} \right\} \tag{8}$$

поскольку E и $\sqrt{-\Sigma} = \sqrt{-\dot{\mathbf{x}}^2 \acute{\mathbf{x}}^2 + (\dot{\mathbf{x}}\,\acute{\mathbf{x}})^2}$ преобразуются как скалярные плотности. На физическом значении корня $E = \sqrt{-\Sigma}$ уравнений движения для плотности E действие (8) переходит в действие Намбу

$$S = \gamma \iint d\tau d\sigma \sqrt{-\dot{\mathbf{x}}^2 \acute{\mathbf{x}}^2 + (\dot{\mathbf{x}}\,\acute{\mathbf{x}})^2}\,.$$

Представление (8) включает Лиувиллевскую моду в форме плотности E. Квантование связей и действия (7) – (8) может привести к новым моментам. Так, например, аналог действия (8) для скалярной частицы

$$S_r = \int d\tau \left\{ \frac{\dot{\mathbf{x}}^2}{2e} - \frac{em^2}{2} - m\sqrt{-\dot{\mathbf{x}}^2} \right\}$$

на любом из корней уравнения $-\mathcal{P}^2 = (m + \sqrt{-\dot{\mathbf{x}}^2/e^2})^2$ генерирует связь $(\sqrt{-\vec{\mathcal{P}}^2} \pm 2m) \approx$ ≈ 0, характерную для дираковской частицы.

Краевое условие для действия (1) в случае открытой струны имеет вид $(\dot{\mathbf{x}}(\dot{\mathbf{x}}\acute{\mathbf{x}}) - \acute{\mathbf{x}}(\dot{\mathbf{x}}^2) \times$ $\times (-\Sigma)^{-1/2}\big|_{\sigma = 0,\,\pi} = 0$ и приводит к неопределенности вида 0/0 [2]. Эту трудность можно устранить добавлением [5] в действие (1) 2-мерного члена Весса – Зумино

$$\Delta S = c \iint d\tau d\sigma\, \partial_\mu \mathbf{n}_i \epsilon^{\mu\nu} \partial_\nu \mathbf{n}_k\,.$$

Полученное выше новое частицеподобное представление для нульструны Шильда позволяет ввести новые объекты – нуль-мембраны и нуль-супер (струны и мембраны). Действие для нуль-мембран имеет вид

$$S_M = \gamma \iiint d\tau d\sigma\, d\rho \left(\frac{-\Sigma}{E}\right), \qquad \Sigma = \det(\partial_\mu \mathbf{x}\, \partial_\nu \mathbf{x})$$

---

[1] Случай $\mathbf{n}_0^2 = 0 = \vec{\mathcal{P}}^2$ соответствует струне Шильда [3]: $H_S = \int d\sigma \left\{ u_0 (\acute{\mathbf{x}} \cdot \vec{\mathcal{P}}) + E\left(\frac{-\vec{\mathcal{P}}^2}{2\gamma \acute{\mathbf{x}}^2}\right) + \dot{E}\pi \right\}$, $S_S =$ $= \frac{\gamma}{2} \iint d\tau d\sigma \frac{(-\Sigma)}{E}$.

и в калибровке $(\dot{x}x') = (\dot{x}\partial_\rho x) = 0$, $E = x'^2(\partial_\rho x)^2 - (x'\partial_\rho x)^2$ приводит к линейному уравнению движения $\ddot{x} = 0$ как и в случае безмассовой частицы. Действия для нуль-супер (струн и мембран) получаются из рассмотренных выше функционалов простой заменой всех производных $\partial_\mu x$ в Σ на суперинвариантные формы [1] $\vec{\Phi}_\mu = \partial_\mu x - \frac{1}{4}\bar{\Theta}\vec{\gamma}\partial_\mu\Theta$. Нуль-суперструна с учетом (или без) членов Весса – Зумино является альтернативным вариантом к суперструне Грина – Шварца [6] в той же мере, как струна Шильда к струне Намбу, и может оказаться непротиворечивой в произвольной размерности пространства-времени.

Автор благодарен Д.В.Волкову, А.И.Вайнштейну, В.Д.Гершуну, Л.Н.Липатову, А.Ю.Морозову, В.В.Нестеренко за интересные обсуждения и И.В.Тютину за конструктивные замечания по общей структуре связей.

Литература

1. *Волков Д.В., Желтухин А.А.* УФЖ, 1985, **30**, 809.
2. *Balachandran A.P., Lizzi F., Sparano G.* Nucl. Phys., 1986, **B236**, 608; 1986, **B277**, 359.
3. *Lizzi F., Rai B., Sparano G., Srivastava A.* Phys. Lett., 1987, **B182**, № 3, 4.
4. *Aragone G.* Preprint CERN-TH 4509/86, 1986.
5. *Желтухин А.А.* ТМФ, 1982, **52**, 73.
6. *Green M.B., Schwarz J.H.* Phys. Lett., 1984, **B136**, № 5, 6.

Физико-технический институт
Академии наук Украинской ССР

Поступила в редакцию
29 июня 1987 г.