Письма в ЖЭТФ, том 46, вып. 9, стр. 337 – 340 *10 ноября 1987 г.*

О КАЛИБРОВОЧНОЙ ФОРМУЛИРОВКЕ ТЕОРИЙ РЕЛЯТИВИСТСКИХ ЧАСТИЦ И СТРУН

А.Т.Филиппов

Показано, что применение принципа локализации линейных канонических симметрий позволяет конструировать релятивистские калибровочные теории частиц и струн, исходя из нерелятивистских. Построена релятивистская калибровочная теория системы N-частиц, связанных гармоническими силами, которую можно квантовать стандартными методами.

Теории релятивистских частиц и струн обычно формулируют либо в явно репараметризационно инвариантном виде, либо с помощью связей и лагранжевых множителей. Оба подхода, однако, нелегко приспособить для описания нескольких взаимодействующих частиц или же необычных струн – в первом необходимо найти инвариантный лагранжиан (нелинейный и не связанный с нерелятивистским), во втором приходится априорно задавать связи. В работе [1] отмечено, что релятивистскую теорию свободных частиц можно получить из нерелятивистской локализацией линейных канонических симметрий некоторого рудиментарного билинейного лагранжиана. При этом получается стандартная калибровочная теория, в которой канонические переменные $p(t), q(t), \xi(t)$ (греческими буквами обозначаются грассмановы переменные) играют роль "полей материи", а лагранжевы множители $l(t)$ появляются как компоненты калибровочного потенциала $A(t)$. Здесь показано, что на этом простом наблюдении раскрывается действие довольно общего принципа локализации линейных суперканонических симметрий, позволяющего получить единым методом не только известные, но и совершенно новые теории.

Следуя [2,3], рассмотрим билинейный рудиментарный лагранжиан

$$L_0 = g_{\mu\nu} p_i^\mu \dot{q}_i^\nu - {}^i/_2 h_{\alpha\beta} \xi^\alpha \dot{\xi}^\beta - H_0(p, q, \xi), \qquad (1)$$

где $\dot{q} \equiv dq/dt \equiv \partial_t q$; $\mu, \nu = 0, 1, \ldots, D$, индекс i нумерует частицы. Симметричные матрицы $g_{\mu\nu}$ и $h_{\alpha\beta}$ можно привести к диагональной форме. Отбросив переменные, дающие нулевые диагональные элементы, получим $g_{\mu\nu} = (-1, \ldots, -1, +1, \ldots, +1)$. Можно показать, что последовательное квантование построенной в [1] калибровочной теории одной скалярной частицы возможно лишь при $g_{00} = -1$, $g_{nn} = +1$. В этом смысле из калибровочного принципа вытекает релятивистская инвариантность. В дальнейшем мы рассматриваем только метрику Минковского, а индексы μ, ν опускаем. В выборе грассмановых перемен-

ных имеется значительный произвол, который можно использовать для описания спиновых и внутренних степеней свободы. Для простоты ограничимся набором ξ_k^μ, $k = 1, \ldots, K$, причем ξ_k^μ такие же лоренцевы векторы как p_i^μ, q_i^μ. Обозначим $\overset{\mathrm{T}}{\Psi} = (p_1, q_1 \ldots \ldots p_N q_N \xi_1 \ldots \xi_K)$ и перепишем L_0 в виде

$$L_0 = {}^1/_2\, \overset{\mathrm{T}}{\Psi} C(\partial_t - H_0)\, \Psi + {}^1/_2\, \partial_t (p_i q_i), \tag{2}$$

где H_0 – суперматрица билинейной формы $H_0(p, q, \xi)$, матрица C легко определяется, $C^2 = -1$. Последний член важен для определения ограничений на параметры локальных преобразований $f(t), \varphi(t)$ на концах эволюционного интервала $0 \leqslant t \leqslant 1$. Часть L_0, содержащая ∂_t, инвариантна при глобальных преобразованиях $\delta\Psi = F(f, \varphi)\Psi$, если $\overset{\mathrm{T}}{F}C + CF = 0$ (транспонирование суперматриц определено так, что $(F\Psi)^{\mathrm{T}} = \overset{\mathrm{T}}{\Psi} F^{\mathrm{T}}$ с учетом антикоммутативности), т.е. $F \in \mathrm{osp}(2N \mid K)$. Полный лагранжиан L_0 инвариантен относительно подалгебры этой супералгебры, порождаемой условием $[F, H_0] = 0$. Лагранжиан, инвариантный при локальных преобразованиях $F(f(t), \varphi(t))$, определяется стандартно

$$L = {}^1/_2\, \overset{\mathrm{T}}{\Psi} C(\partial_t - A)\, \Psi, \tag{3}$$

где A получается из F заменой f и φ на калибровочные потенциалы $l(t), \lambda(t)$. В силу условия $[F, H_0] = 0$ матрицу H_0 обычно удается включить в A сдвигом l и λ на константы. Калибровочные преобразования также стандартны

$$\delta\Psi = F\Psi, \quad \delta A = \dot{F} + [F, A]. \tag{4}$$

В случае одной частицы ($N = 1$) лагранжиан (3) имеет вид

$$L = p\dot{q} - {}^i/_2\, \xi_k \dot{\xi}_k - {}^1/_2\, lp^2 - i\lambda_k (p\xi_k) - {}^i/_2\, \xi_i l_{ik} \xi_k \tag{5}$$

где $l_{ik} = -l_{ki}$. Этот лагранжиан описывает теорию безмассовых частиц со спином, полученную весьма сложным способом для $K = 2$ в [4, 5].

В [4, 5] рассмотрено также квантование теории (5) методом Дирака. Для последовательного релятивистски-инвариантного квантования лучше приспособлен метод ФВ [6], в котором l, λ рассматриваются как новые канонические координаты. Вводя сопряженные импульсы k, κ и добавляя к лагранжиану члены $k\dot{l}$, $\kappa\dot{\lambda}$, мы придаем калибровочным потенциалам равный статус с основными переменными. Необходимость такого расширения фазового пространства связана с существованием калибровочных инвариантов полей l, λ. Например, в случае скалярной частицы $\delta l = \dot{f}$ и $f(0) = f(1) = 0$, так что $\int_0^1 dt\, l(t)$ – калибровочный инвариант. Это не позволяет зафиксировать значение $l(t)$ выбором калибровки. Расширение фазового пространства по ФВ корректно фиксирует калибровку $l = 0$. Добавление в лагранжиан духов Фаддеева – Попова позволяет скомпенсировать вклады добавленных нефизических степеней свободы за счет БРСТ-инвариантности. Стандартное квантование с лиувиллевой мерой в расширенном таким способом фазовом пространстве дает правильные выражения для релятивистских пропагаторов [7]. Определяя поля, зависящие от координат q^μ, l, λ и духов, можно получить калибровочно инвариантную формулировку теории поля, в случае скалярных частиц это сделано в [8].

Для струны индекс i меняется непрерывно, обозначим его буквой s, $0 \leqslant s \leqslant 2\pi$. При выборе переменных $p^\mu(t, s), q^\mu(t, s)$ и $\xi_\alpha^\mu(t, s)$, $\alpha = 1, 2$ простейший рудиментарный лагранжиан есть

$$L_0 = \int_0^{2\pi} ds\, \mathcal{L}_0(t, s), \quad \mathcal{L}_0 = p\dot{q} - {}^1/_2\, (p^2 + q'^2) + {}^i/_2\, \xi_\alpha \dot{\xi}_\alpha - \xi_\alpha \sigma_3^{\alpha\beta} \xi'_\beta, \tag{6}$$

где $q' \equiv \partial_s q \equiv \partial q$, σ_3 – матрица Паули. Обозначив $\overset{\mathrm{T}}{\Psi} = (p, q, \xi_1, \xi_2)$ легко представить L_0 в форме (2) и найти глобальные симметрии, зависящие от параметров $f(s)$, $\varphi(s)$:

$$\delta\Psi = \mathcal{F}\Psi = D_+ F D_-, \quad D_\pm = \begin{pmatrix} \partial_\pm & 0 \\ 0 & \mathbb{1} \end{pmatrix}, \quad \partial_+ = \begin{pmatrix} \partial & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \partial_- = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \partial \end{pmatrix},$$

$$F = \begin{pmatrix} f & \varphi \\ \tilde{f} & \tilde{\varphi} \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} f_2 & f_1 \\ f_1 & f_2 \end{pmatrix}, \quad \tilde{f} = \begin{pmatrix} f_+\partial + \partial f_+ & 0 \\ 0 & f_-\partial + \partial f_- \end{pmatrix}, \quad \varphi = -i\begin{pmatrix} \varphi_1 & -\varphi_2 \\ \varphi_1 & \varphi_2 \end{pmatrix}, \tag{7}$$

$$\tilde{\varphi} = \begin{pmatrix} \varphi_1 & \varphi_1 \\ \varphi_2 & -\varphi_2 \end{pmatrix},$$

где $f_\pm = \frac{1}{2}(f_2 \pm f_1)$. Порядок расстановки оператора ∂ и вид матрицы $\tilde{f}$ определяются условиями замыкания $[\delta_1, \delta_2] \sim \delta_3$. Определим $\mathcal{A} = D_+ A D_-$ заменой в $\mathcal{F}: f \to f_1$, $\varphi \to \lambda$ и получим из (3) лагранжиан

$$\mathcal{L} = p\dot{q} - \tfrac{1}{2} l_1 (p^2 + q'^2 + i\overset{\mathrm{T}}{\xi}\sigma_3\xi) - l_2 (pq' + \tfrac{i}{2}\overset{\mathrm{T}}{\xi}\xi') - i\lambda^{\mathrm{T}}\xi p - i\lambda^{\mathrm{T}}\sigma_3\xi q', \tag{8}$$

калибровочные преобразования определяются формулой (4), где $A \to \mathcal{A}$, $F \to \mathcal{F}$. Этот лагранжиан фермионной струны впервые получен в [9]. Все сказанное о квантовании теории частиц относится и к теории струны. Главное осложнение – бесконечное число параметров калибровочной группы (в дискретном представлении оператор ∂ определяется набором матриц $n i \sigma_2$, $n = 1, 2, \ldots$). Можно надеяться, что прозрачное представление калибровочной структуры теории позволит по-новому подойти к проблеме построения струнной теории поля. Заметим, что при другом выборе грассмановых координат получаются другие модели струны. Интересно было бы перечислить все возможные типы калибровочных теорий струны.

Рудиментарный лагранжиан N-частиц, связанных гармоническими силами, имеет вид:

$$L_0 = p_i \dot{q}_i - \tfrac{1}{2} p_i p_i - \tfrac{1}{2} k_{ij} (q_i - q_j)^2, \quad i, j = 1, 2, \ldots, N. \tag{9}$$

Применяя принцип локализации, построим лагранжиан, который мы выпишем в явном виде для $N = 3$:

$$L = z\dot{y} + z_1\dot{y}_1 + z_2\dot{y}_2 - \tfrac{1}{2} l_1 (z^2 + M^2) - \tfrac{1}{2} l_2 (z_1^2 + y_1^2 + z_2^2 + y_2^2 - z^2 - m^2) -$$

$$- \tfrac{1}{2} l_3 (z_1^2 + y_1^2 - z_2^2 - y_2^2) - l_4 (z_1 z_2 + y_1 y_2) - l_5 (z_1 y_2 - z_2 y_1). \tag{10}$$

Здесь y, z описывают движение центра масс, y_1, z_1 – относительное движение частиц (1, 2), а y_2, z_2 – движение третьей частицы в системе центра масс частиц (1, 2). Параметр k убран изменением масштаба q и t. Связи при l_1, l_2 генерируют трансляции T_1 и вращения U_1, связи при l_3, l_4, l_5 порождают симметрию SU_2. Таким образом, калибровочная группа есть $T_1 \otimes U_1 \otimes SU_2$. Этот результат обобщается на произвольные значения N, для $N = 2$ достаточно положить в (10) $y_2 = z_2 = 0$. Абелев характер преобразований l_1 и l_2 позволил нам добавить в (10) произвольные массовые параметры M^2 и m^2, однако, массы отдельных частиц в этой теории не определены. Если k_{ij} различны для разных частиц, симметрия SU_{N-1}, разрушается. При соответствующем выборе k_{ij} можно получить калибровочную теорию дискретной струны. Применение описанного выше формализма квантования, вероятно, позволит построить релятивистскую квантовую теорию взаимодействия составных частиц.

За обсуждения результатов автор благодарен А.В. Ефремову, А.П. Исаеву, В.К.Митрюшкину и В.И.Ткачу.

Литература

1. *Филиппов А.Т.* Краткие сообщения ОИЯИ, 1987, № 3 (23), 5.
2. *Березин Ф.А., Маринов М.С.* Письма в ЖЭТФ, 1975, **21**, 678.
3. *Casalbuoni R.* Nuovo Cim., 1976, **33A**, 389.
4. *Brink L., Di Vecchia P., Howe P.* Nucl. Phys., 1977, **B118**, 76.
5. *Гершун В.Д., Ткач В.И.* Письма в ЖЭТФ, 1979, **29**, 320.
6. *Fradkin E.S., Vilkovisky G.A.* Phys. Lett., 1975, **55B**, 224.
7. *Henneaux M., Teitelboim C.* Ann. Phys., 1982, **143**, 127.
8. *Neveu A., West P.* Phys. Lett., 1986, **182B**, 343.
9. *Deser S., Zumino B.* Phys. Lett., 1976, **65B**, 369; *Brink L., Di Vecchia P., Howe P.* ibid, 471.

Объединенный институт
ядерных исследований

Поступила в редакцию
14 сентября 1987 г.