Письма в ЖЭТФ, том 46, вып. 9, стр. 340 – 342 *10 ноября 1987 г.*

ФЕРМИОННАЯ СТРУНА И УНИВЕРСАЛЬНОЕ ПРОСТРАНСТВО МОДУЛЕЙ

А.С.Шварц

Указывается схема выхода за рамки теории возмущений в теории фермионной струны.

Теория фермионной струны в формализме Полякова приводит к выражению статистической суммы и струнных амплитуд в виде суммы интегралов по конечномерным суперпространствам M_p-пространствам модулей суперконформных многообразий рода p [1]. Разложение в эту сумму отвечает петлевому разложению (иными словами, теории возмущений по топологическому заряду). Выход за рамки теории возмущений требует перехода от M_p к универсальному пространству модулей. Для бозонной струны аналогичная программа была намечена в [2], однако ее выполнение далеко от завершения. Мы покажем, что для фермионной струны можно продвинуться значительно дальше. В частности, мы определим универсальное пространство модулей (UMS) и построим на нем объект, превращающийся на каждом из M_p в суперформу Мамфорда [3], которую можно рассматривать как голоморфный квадратный корень из струнной меры [4]. Отсюда получается выражение струнной меры через супераналоги τ-функции Сато. Аналог UMS может оказаться полезным в теории бозонной струны. (В бозонном случае в качестве универсального пространства модулей используется многообразие Gr [2], определение которого непосредственно обобщается на суперслучай [5]. Однако многообразие Gr как в суперслучае, так и в бозонном случае шире, чем должно быть универсальное пространство модулей.)

Будем исходить из суперпространства H, состоящего из суперполей вида $F(z,\theta) = f(z) + \varphi(z)\theta$, где $|z| = 1$, θ – нечетная переменная. Билинейное скалярное произведение в H определим формулой $\langle F, F' \rangle = \oint f(z) f'(z) dz + \oint \varphi(z)\varphi'(z) dz$, где $|z| = 1$. Пусть S-подмножество базиса $\{z^k, z^k\theta\}$, k – целое, получающееся присоединением и удалением конечного числа элементов из S_0 – подмножества $\{z^k, z^k\theta,\ k < 0\}$. Обозначим через $H(S)$ подпространство, натянутое на S. Супермногообразие, состоящее из подпространств $W \subset H$, для которых проекция на одно из $H(S)$ является изоморфизмом, обозначим Gr. Группа Γ обратимых четных гладких суперполей $A(z,\theta) = a(z) + \alpha(z)\theta$, $|z| = 1$, действует в H и в Gr с помощью операторов умножения. Символом UMS будем обозначать подмногообразие многообразия Gr, состоящее из таких $W \in Gr$, что найдется $A \in \Gamma$, для которого $W^{\perp} = \Pi A W$ (здесь $W^{\perp}$ – ортогональное дополнение к W, оператор Π переводит $f(z) + \varphi(z)\theta$ в $\varphi(z) + f(z)\theta$). Пусть N – комплексное компактное супермногообразие размерности $(1,1)$, L – линейное расслоение с базой N. Если в окрестности одной из точек N выбрана система координат (z, θ) и над этой окрестностью фиксирована тривиализация расслоения L, то определим $W = W(N, L)$ как пространство полей $f(z) + \varphi(z)\theta$, $|z| = 1$, продолжающихся в голоморфные сечения над $N \setminus U_0$, где U_0 выделено неравенством $|z| < 1$. Легко видеть, что $W(N, L) \in Gr$ и $AW(N, L) = W(N, L')$, где $A \in \Gamma$, L' – другое линейное расслоение над N. Можно доказать, что $W(N, L) \in UMS$; доказательство основано на соотношении $W(N, L)^{\perp} = \Pi W(N, L^{-1} \otimes \omega)$, где ω – расслоение, сечениями которого являются комплексные меры на N. Это позволяет интерпретировать UMS, как универсальное пространство модулей и рассматривать точки UMS как супермногообразия произвольного (быть может, бесконечного) рода. Рассмотрим конечномерные суперпространства $\Sigma(W) = \mathcal{A}(W) + \mathcal{A}(W^{\perp})$, где $\mathcal{A}(W)$ состоит из элементов пространства W, переходящих в ноль при проекции W на $H(S_0)$. Всякому базису w в $\Sigma(W)$ можно сопоставить базис $\hat{w}$ в W, определенный с точностью до преобразования, имеющего единичный березиниан. (Например, если $\mathcal{A}(W^{\perp}) = 0$, базис $\hat{w}$ можно построить, дополнив базис w в $\Sigma(W) = \mathcal{A}(W)$ функциями, отображающимися при проекции на $H(S_0)$ в базис S_0 пространства $H(S_0)$. Если w – базис в $\Sigma(W)$, w' – базис в $\Sigma(AW)$, то определим $\tau(w, w', W, A)$ как детерминант перехода от базиса $A\hat{w}$ в AW к базису $\hat{w}'$. (В суперслучае, в отличие от бозонного случая, этот детерминант конечен.) С помощью функции τ можно интерпретировать суперформу Мамфорда [3] в терминах UMS. Именно, если $W \in UMS$, $W^{\perp} = \Pi AW$, $A \in \Gamma$ положим $M(w, w', W) = \tau(w, w', W, A^3)\,\tau(w, \Pi w, W, A)^{-3}$, (здесь w – базис $\Sigma(W) = \Sigma(W^{\perp})$, Πw – базис $\Pi\Sigma(W^{\perp}) = \Sigma(\Pi W^{\perp}) = \Sigma(AW)$, w' – базис $\Sigma(A^3 W)$). Функция $M(w, w', W)$ не зависит от выбора оператора $A \in \Gamma$, имеет вес 1 по w' и вес 5 по w. (Функция от базиса имеет вес n, если она умножается на $(\mathrm{Ber}\, C)^n$ при замене базиса с матрицей C.) Если $W = W(N, L)$, где N – суперконформное многообразие, L – тривиальное расслоение, то $\Sigma(A^n W)$ отождествляется с $\mathcal{A}^{n/2} + \Pi\mathcal{A}^{(1-n)/2}$, где $\mathcal{A}^k$ – пространство голоморфных полей типа $(k, 0)$ на N, Π – оператор обращения четности. При этом отождествлении $M(w, w', W)$ переходит в суперформу Мамфорда. Функция M определяет продолжение суперформы Мамфорда в объект, определенный на пространстве модулей всех (не обязательно суперконформных) (1,1)-мерных компактных супермногообразий; возможность такого продолжения следует также из [3]. Отметим, что для всякой точки $W = W(N, L) \in UMS$, отвечающей суперконформному многообразию N, можно найти такие функции P, Q от z, θ, $|z| = 1$, что оператор $PD + Q$ переводит W в себя (как обычно, $D = \partial/\partial\theta + \theta\,\partial/\partial z$). Мы получили выражение струнной меры через функцию τ (см. [4]). Эта функция является аналогом τ-функции в смысле Сато, однако, обладает более простыми свойствами. Именно, зависимость функции τ от A при $W = W(N, L)$ может быть описана с помощью мероморфных абелевых интегралов на супермногообразии N. Покажем в заключение, как UMS описывается в терминах фоковского пространства, ограничиваясь для простоты бозонным случаем. В этом случае роль H играет пространство функций на окружности $|z| = 1$ со скалярным произведением $\oint f(z) f^*(z)\, dz$, $|z| = 1$. По комплексной кривой N и расслоению L строится подпространство $W = W(N, L) \in Gr$ [2]. Эти подпространства удовлетворяют условию $W^{\perp} = AW$, где A – оператор, умножения на функцию. За счет выбора L можно сделать $A \equiv 1$ (для этого следует считать L спинорным расслоением с четной невырожденной θ-характеристикой). Поэтому UMS в бозонном случае разумно определить, как многообразие подпространств $W \in Gr$, удовлетворяющих условию $W^{\perp} = W$. Каждому $W \in UMS$ можно сопоставить определенный с точностью до множителя вектор Φ из фермионного фоковского пространства с операторами уничтожения a_n и рождения a_n^+, $n = 0, 1, 2, \ldots$, найдя его из соотношения: $(\oint f(z)\,\psi(z)\,dz)\Phi = 0$, где $f \in W$ и $\psi(z) = \sum a_n z^n + \sum a_n^+ z^{-1-n}$, $n \geqslant 0$. Обратно, если вектор Φ может быть получен из фоковского вакуума с помощью линейного канонического преобразования $\tilde{a}_n = \sum u_{nk} a_k + \sum v_{nk} a_k^+$, то Φ отвечает некоторому $W \in UMS$. Аналогичные конструкции могут быть указаны в суперслучае.

Пользуюсь случаем выразить благодарность А.Воронову, А.Зоричу и А.Радулу.

Литература

1. *Бараное М.А., Шварц А.С.* Письма в ЖЭТФ, 1985, 42,340.

2. *Friedan D., Shenker S.* Phys. Lett.,1986, B175, 287; *Манин Ю.И.* Функц. анал. и прил., 1986, 20, 88; *Alvarez-Gaume L., Gomez C., Reina C.* Phys. Lett., 1987, B190, 55; *Морозов А.Ю.* Письма в ЖЭТФ, 1987, 45, 457.

3. *Воронов А.А.* Функц. анал. и прил., 1987, 21.

4. *Baranov M.A., Schwarz A.S.,* Int. J. of Mod. Phys. A., 1987, 2.

5. *Manin Yu., Radul A.,* Comm. Math. Phys., 1986, 98, 65; *Ueno K., Yamada H.,* Lett. Math. Phys., 1987, 13, 59.

Московский инженерно-физический институт

Поступила в редакцию
15 сентября 1987 г.