Письма в ЖЭТФ, том 46, вып. 9, стр. 345 – 348 *10 ноября 1987 г.*

ЯЧЕИСТАЯ СТРУКТУРА ПРОСТРАНСТВА ВБЛИЗИ ОСОБЕННОСТИ ПО ВРЕМЕНИ В УРАВНЕНИЯХ ЭЙНШТЕЙНА

А.А.Кириллов, А.А.Кочнев

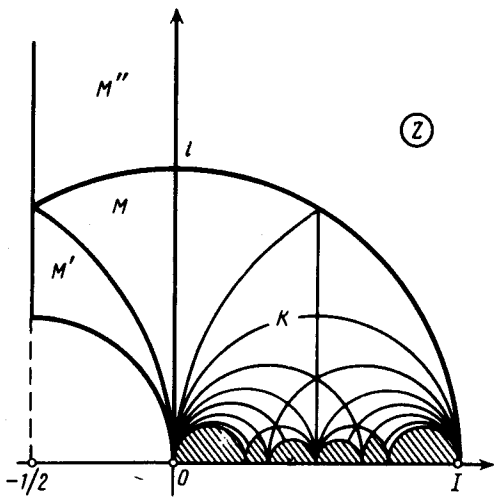
На одном из общих космологических решений [1] показано, что при эволюции метрики к особенности в стохастическом колебательном режиме вблизи нее образуются области с мелкомасштабной ячеистой структурой 3-геометрии. Исследованы статистика показателей и зависимость длин от времени в таких областях.

1. Колебательный режим в релятивистской космологии изучен подробно в окрестности отдельной пространственной точки [2,3,1]. В данной статье исследовано влияние длительной осцилляционной эволюции метрики на строение показателей в координатно-конечной околосингулярной пространственной области. Это сделано на примере построенного в [1] невакуумного общего решения с колебательной и монотонной (содержащей особенность) стадия-

ми эволюции (КС, МС): на отдельной эпохе $ds^2 = dt^2 - \Sigma(t^{p_l(x)} l_\alpha(x)\, dx^\alpha)^2$, $\Sigma p_l(x) = 1$, $\Sigma p_l^2(x) = 1 - q^2(x)$ ($t \ll 1$, $x \equiv (x^\alpha)$, $\alpha = 1, 2, 3$, суммы всюду – по трем осям l, m, n; $q = 0$ отвечает известному решению БЛХ [2]). КС объединяет эпохи с отрицательным показателем в метрике; на данной и следующей за ней (в направлении $t \to 0$) эпохах показатели связаны локальным отображением: при $p_l < 0$

$$p_l' = \frac{-p_l}{1+2p_l}, \quad p_m' = \frac{p_m + 2p_l}{1+2p_l}, \quad p_n' = \frac{p_n + 2p_l}{1+2p_l}; \quad q' = \frac{q}{1+2p_l}. \tag{1}$$

Итерации (1) приводят к эпохе с $p_l(x), p_m(x), p_n(x) > 0$, длящейся вплоть до $t = 0$ (МС в точке x). Причины выбора этого решения: 1) геометрия в нем богаче, чем в решении БЛХ, так как метрика содержит дополнительную произвольную функцию $q(x)$; 2) выход на МС позволяет просто описать вблизи $t = 0$ пространственное строение показателей, которые 3) в классе почти вакуумных начальных условий (КС: $t = t_1$: $q^2(x) \ll 1$) за счет стохастизации на КС имеют квазиинвариантное статистическое распределение на МС.



Часть плоскости комплексного параметра $(-p_1 + iq/\sqrt{2})/(1-p_2) = z$ при $\operatorname{Im} z \geqslant 0$ (при $\operatorname{Im} z \leqslant 0$ картина та же). Жирные линии – границы K, M, M', M''; $z \in K$: $p_1 < 0 < p_2 \leqslant p_3$, $z \in M$: $0 \leqslant p_1 \leqslant p_2 \leqslant p_3$, $z \in M'$: $0 \leqslant p_2 \leqslant p_1 \leqslant p_3$, $z \in M''$: $0 \leqslant p_1 \leqslant p_3 \leqslant p_2$. Показаны несколько подобластей K_r в K, остальные заштрихованы.

2. Используя упорядоченные показатели $p_1 \leqslant p_2 \leqslant p_3$, определим:

$$\frac{-p_1 + i\kappa q/\sqrt{2}}{1-p_2} \equiv \begin{cases} u + iv = w \in K : p_1(u, v) < 0 & \text{(КС)} \\ U + iV = W \in M : p_1(U, V) \geqslant 0 & \text{(МС)} \end{cases} \tag{2}$$

(области К, М и вводимые ниже M', M'', K_r см. рисунок); величина $\kappa = \pm 1$ преобразуется при смене эпох как $\kappa' = -\kappa \operatorname{sign}[(p_2 + 3p_1)(p_3 + 3p_1)]$. Из (1), (2) для $W(w)$ имеем цепную дробь ($a_1, \ldots, a_n = 1, 2, \ldots$):

$$\begin{gathered} W(w) = \delta_{1J}\, z(w) - \delta_{2J}\, [1, z(w)] + \delta_{3J}/z(w), \\ z(w): \{ w = [a_1, \ldots, a_n, z], \quad w \in K, z \in M \cup M' \cup M'' \}, \end{gathered} \tag{3}$$

где $J = 1, 2, 3$ соответственно при $z \in M, M', M''$. $W(w)$ есть непрерывное кусочно-конформное отображение K на M со счетным множеством прообразов K_r области M в K, мультиндекс $r = \{a_1, \ldots, a_n; J\}$; при $\operatorname{Im} w \to 0$ оно обладает перемешиванием (подобно отображению Гаусса [4]) и инвариантной мерой в M (см. (5)).

Зададим на КС функцию $w(x)$ (считая смену эпох мгновенной при $t = t_1$) в области 3-пространства A ; при $t \to 0$ (на МС) ту же область обозначим через B. При отображении $w(x): A \to K(A) \subset K$ разбиению $K = \bigcup_r K_r$ отвечает $A = \bigcup_r A_r$, $\{r'\} \subset \{r\}$. Пусть для простоты $K(A) = K$ и все A_r односвязны. Две коммутирующие пары однозначных отображений $w(x): A_r \to K_r$, $W_r(w): K_r \to M$ и $t(t_1) \to 0$: $A_r \to B_r$, $W(w(x)): B_r \to M$ определяют разбиение области $B = \bigcup_r B_r$ на счетное множество ячеек, в каждой из которых набор показателей ($p_1\ p_2\ p_3$) принимает все значения, алгебраически допустимые при $p_1 \geqslant 0$. За n эпох образуется $\sim 2^n$ ячеек. Граница ячейки есть двухмерная поверхность вырожденной динамики – она состоит из трех кусков, на которых либо $p_1 = 0$, либо $p_1 = p_2$, либо $p_2 = p_3$; куски сшиты трансверсально; ячейки склеены между собой по соответствующим кускам. Легко показать, что поверхность ячейки не может быть гомеоморфна сфере и в типичном случае топологически есть тор либо цилиндр. Ячейки с числом ручек $g \geqslant 2$ нетипичны – возникают лишь при наличии на их границах точек с $\nabla U(x) = 0$ или $\nabla V(x) = 0$.

Пусть теперь $w(x)$ отвечает малому q-возмущению решения БЛХ в A , т.е. плотность распределения по u, v в A при $t = t_1$

$$\rho_A(u, v; [w(x)]) = \Omega^{-1}(A) \int_A \delta(w(x) - w) \sqrt{\gamma} d^3x, \quad \Omega(A) \equiv \int_A \sqrt{\gamma} d^3x, \qquad (4)$$

(функционал от $w(x)$) такова, что $|v| \ll \sigma v \ll 1$, $\epsilon \equiv \sigma v / \sigma u \ll 1$ ($\bar{v}$, $\sigma^2 v$ – среднее и дисперсия). При разумных ограничениях на вид ρ_A нижней оценкой для числа ячеек в B с с суммарным объемом $\sim \Omega(B)$ будет $N \sim \epsilon^{-1} \gg 1$, т.е. $0 < \Omega(B_r) \lesssim \epsilon\, \Omega(B)$ – множество ячеек образует мелкомасштабную геометрическую "пену". Отметим, что лишь в пределе $\epsilon \to 0$, когда момент выхода на МС $t_* \to 0$, решение с $p_1 = 0$ устойчиво при $t < t_*$ (если же t_* конечно, то на участке $0 < t < t_*$ возникает дрейф от $p_1(t_*) = 0$ к некоторому $0 < p_1(0) \ll 1$).

Стохастичность (3) при $\operatorname{Im} w \to 0$ порождает универсальную статистику для U, V в области B при $\epsilon \to 0$: на любом семействе $\{w_\epsilon(x)\}$ существует $\lim_{\epsilon \to 0} \rho_B(U, V; [W(w_\epsilon(x))]) \equiv \rho(U, V)$. Анализ (3) дает

$$\rho(U, V) = \frac{2}{\pi V^2} \left[3 - \frac{U}{V} \operatorname{arctg} \frac{V}{U} - \frac{U+1}{V} \operatorname{arctg} \frac{V}{U+1} - \frac{U+U^2+V^2}{V} \operatorname{arctg} \frac{V}{U+U^2+V^2} \right]. \qquad (5)$$

Из (5) численно найдено : $(\bar{p}_1; \bar{p}_2; \bar{p}_3; |\bar{q}|) = (0{,}06;\ 0{,}17;\ 0{,}77;\ 0{,}50)$.

3. Длина вектора λ^α на множестве реализаций $W(x)$ есть случайная величина $[\Sigma(t^{p_1} l_\alpha \lambda^\alpha)^2]^{1/2} \equiv \lambda(t)$. Ее момент $\overline{\lambda^s}$ $(s > 0)$ убывает при $t \to 0$ как лапласовский интеграл $\int_0 t^{sp_1} \rho(p_1) \varphi(p_1) dp_1$, где $\rho(p_1)$ – преобразованное распределение (5), причем $\rho(p_1 \ll 1) \sim p_1^{-1/2}$, а $\varphi(p_1)$ есть вклад корреляции векторов $l_\alpha, m_\alpha, n_\alpha$ с W , которая возникает за счет их поворотов на КС; нелокальность формул поворотов не позволяет найти φ , но можно показать, что $0 < \varphi(0) < \infty$. Таким образом, $\overline{\lambda^s}(t \to 0) \sim (-\ln t)^{-1/2}$, и для локальной длины можно лишь констатировать ее медленное убывание при $t \to 0$: из неравенств типа Чебышева следует, что вероятность

$$P\{\lambda(t) \geqslant e\tau^{-1/2} \ln L(\tau)\} \leqslant 1/L(\tau), \quad \tau \equiv -\ln t \to \infty, \qquad (6)$$

где $L(\tau)$ – произвольная функция медленного роста: при $\tau \to \infty$ и $c > 0$ $L(c\tau)/L(\tau) \to 1$, т.е. (6) инвариантна при замене $t \to t^c$.

Пусть теперь $\lambda^{\alpha}(\theta)$ – касательный вектор кривой общего положения $\mathcal{C}: \{ x^{\alpha} = x^{\alpha}(\theta), \theta \in [a, b] \}$. Разбив $[a, b]$ на N равных частей Δ_k, для длины кривой имеем $l_{\mathcal{C}}(t) = \int_a^b d\theta\, \lambda(t, \theta) = N^{-1} \sum_k \lambda_k(t)$, где $\lambda_k(t) \equiv \lambda(t, \theta_k \in \Delta_k)$. При $\epsilon \to 0$ $\lambda_1, \ldots, \lambda_N$ дают N независимых случайных величин, и в пределе $N \to \infty$, $\epsilon N \to 0$ с вероятностью 1:

$$l_{\mathcal{C}}(t) \sim (-\ln t)^{-1/2}, \quad t \to 0. \tag{7}$$

Мы признательны В.А.Белинскому, который указал нам на работу [1], а также Л.М.Лерману и А.М.Сатанину за ценные замечания.

Литература

1. *Белинский В.А., Халатников И.М.* ЖЭТФ, 1972, **63**, 1121.
2. *Белинский В.А., Лифшиц Е.М., Халатников И.М.* УФН, 1970, **102**, 463; Adv. in Phys., 1982, **31**, 639.
3. *Khalatnikov I.M., Lifshitz E.M., Khanin K.M., Shehur L.M., Sinai Ya.G.* ICTP preprint IC/84/64, Miramare – Trieste, 1984.
4. *Корнфельд И.П., Синай Ф.Я.Г., Фомин С.В.* Эргодическая теория. М.: Наука, 1980.

Физико-технический институт им. А.Ф.Иоффе
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
21 сентября 1987 г.