Письма в ЖЭТФ, том 51, вып. 2, стр. 111 – 114 *25 января 1990 г.*

ГРАВИТАЦИОННЫЙ ТОПОЛОГИЧЕСКИЙ ЧЛЕН ЧЕРНА–САЙМОНСА В ПЛЕНКЕ СВЕРХТЕКУЧЕГО ^{3}He-*A*

Г.Е.Воловик

Найдено квантование гидродинамического параметра в пленке ^{3}He-*A*, который имеет смысл гравитационного топологического заряда при члене Черна–Саймонса в аналогии между ^{3}He-*A* и квантовой теорией поля.

Некоторые физические параметры в эффективном гидродинамическом действии для квантовой системы многих частиц принимают квантованные значения из-за нетривиальной внутренней топологической структуры системы. В квантовой теории поля в 2 + 1-измерении это коэффициенты (заряды) при топологических членах Черна–Саймонса (см. работу [1] и ссылки в ней). В конденсированных средах подобное квантование возникает для таких параметров, как Холловская проводимость σ_{xy} в двумерных электронных системах [2] и коэффициент при инварианте Хопфа в гидродинамическом действии для спиновой динамики магнитных систем, который определяет тип квантовой статистики магнитных солитонов [3]. Последний коэффициент был вычислен для пленки ^{3}He-*A* [4] и для антиферромагнетика с определенным типом симметрии [5]. Ведутся поиски других физических систем, в которых возможно квантование параметров. Одним из кандидатов является квантовая спиновая жидкость с нарушенной пространственной и временной четностью (см., например, [6]).

Здесь мы рассмотрим квантование, возникающее в гидродинамическом действии для орбитальной и сверхтекучей динамики пленки ^{3}He-*A*. Рассматриваемый ранее член в орбитальном действии, описывающий внутренний квантовый эффект Холла в ^{3}He-*A* [7], приводит лишь к приближенному квантованию параметра Холла σ_{xy} в пределе, когда сверхтекучая щель $\Delta \ll \epsilon_F$, где ϵ_F – энергия Ферми (см. [7]). Оказывается в орбитальном действии имеется другой член, коэффициент при котором квантуется точно. Он аналогичен гравитационному члену Черна–Саймонса в квантовой теории поля [1]:

$$S = \frac{q_{gr}}{24\pi} \int d^2x dt e^{\mu\nu\lambda} (R_{\mu\nu,ab} \omega^{ab}_{\lambda} + \frac{2}{3} \omega^b_{\mu a} \omega^c_{\nu b} \omega^a_{\lambda c}), \tag{1}$$

где $\mu = (0, 1, 2)$ – пространственные индексы; $a = (0, 1, 2)$ – изотопические индексы; $\omega_{\mu,ab}$ – спиновая связность; R – тензор кривизны:

$$R_{\mu\nu,ab} = \partial_\mu \omega_{\nu,ab} + \omega^c_{\mu,a} \omega_{\nu,cb} - (\mu \leftrightarrow \nu). \tag{2}$$

Гравитационный топологический заряд q_{gr} в фундаментальной квантовой теории поля предполагается целым в эвклидовом пространстве [8], что вообще говоря не должно выполняться в конденсированной среде, где аналог гравитации связан с появлением параметра порядка и общая ковариантность отсутствует. Мы покажем, что в пленке ^{3}He-*A* соответствующий заряд является дробным; $q_{gr} = N/16$. Здесь N – внутренний целочисленный топологический инвариант системы, определенный как интеграл от функций Грина по импульсному пространству [4,7] и скачкообразно меняющийся при прохождении одного из уровней энергии поперечного движения фермионов в пленке через уровень Ферми (точнее при прохождении уровня Ферми через дьявольскую точку в спектре фермионов в пленке).

Орбитальная часть параметра порядка в пленке ^{3}He-*A* представляет собой комплексный вектор (см., например, [7]):

$$\vec{\Delta} = \vec{\Delta}_1 + i\vec{\Delta}_2 ,$$

лежащий в плоскости пленки (x, y). В равновесии $\vec{\Delta}_1 \perp \vec{\Delta}_2$, $|\vec{\Delta}_1| = |\vec{\Delta}_2| = \Delta$ и есть только одна степень свободы — фаза Φ конденсата

$$\vec{\Delta}^{eq} = \Delta(\hat{\mathbf{x}} + i\hat{\mathbf{y}})e^{i\Phi}, \tag{3}$$

однако мы не будем ограничиваться равновесным значением. Действие для $\vec{\Delta}$ получается интегрированием по Боголюбовским фермионам, которые в простейшем случае независимых уровней поперечного движения (взаимодействие фермионов с различных уровней, как мы увидим, не изменит результат) удовлетворяет следующему уравнению Боголюбова:

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t} = [\tau_1 \frac{1}{2}\{\Delta_1^i, p_i\} + \tau_2\frac{1}{2}\{\Delta_2^i, p_i\} + \tau_3(\epsilon_n(\mathbf{p} - e\tau_3\mathbf{A}) - \mu - eA_0)]\psi, \tag{4}$$

где ψ — боголюбовский спинор; τ_a — матрицы Паули в пространстве частица--дырка; $i = (1, 2)$; $p_i = -i\dfrac{\partial}{\partial x^i}$; $\{,\}$ — антикоммутатор; $\epsilon_n(\mathbf{p}) = \epsilon_n(0) + \dfrac{p^2}{2m_n}$ — спектр возбуждений на n-ом уровне поперечного движения, при больших n имеем $\epsilon_n(0) \sim n^2/a^2$, где a — толщина пленки; A_μ — введенное для удобства калибровочное поле, которое в электрически заряженной системе является электромагнитным полем. Спектр боголюбовских фермионов имеет вид

$$E_n^2(\mathbf{p}) = (\epsilon_n(p) - \mu)^2 + (\vec{\Delta}_1\mathbf{p})^2 + (\vec{\Delta}_2\mathbf{p})^2.$$

Для нахождения квантующегося заряда выясним, какой член в действии меняется скачком при прохождении n-ого уровня через уровень Ферми $\epsilon_F = \mu$, т.е. при изменении топологического инварианта N от $n-1$ до n. При этом мы считаем, что сам параметр порядка при этом не испытывает скачка, поскольку он наводится другими, заполненными, уровнями. Для этого рассмотрим результат интегрирования по фермионам при $\epsilon_n(0)$ вблизи μ и по обе стороны от μ. Введем $M = \epsilon_n(0) - \mu$ и положим $M \ll \Delta^2 m_n$. В этой области параметров характерные импульсы вблизи минимума спектра $E_n(p)$ имеют порядок $p \sim M/\Delta$, поэтому в $\epsilon_n(p)$ можно пренебречь членом с дисперсией, так как $p^2/m_n \sim \dfrac{M^2}{\Delta^2 m_n} \ll M$. В результате уравнение Боголюбова переходит в уравнение для релятивистских фермионов с массой M в поле триад

$$(\frac{1}{2}\tau^a\{e_a^\mu, \frac{\partial}{\partial x^\mu}\} + M - eA_0)\psi = 0, \tag{5}$$

где $x_0 = it$, а триады e_a^μ имеют вид $e_1^i = \Delta_2^i$, $e_2^i = -\Delta_1^i$, $e_0^0 = 1$. Это уравнение можно переписать в стандартном инвариантном виде через спиновую связность ω:

$$\tau^c e_c^\mu(\partial_\mu - \frac{1}{8}\omega_{\mu,ab}[\tau^a, \tau^b])\psi = -M\psi, \tag{6}$$

где в нашем случае отлична от нуля только компонента $\omega_{\mu,12} = -\omega_{\mu,21}$, причем временная компонента связности задается электромагнитным полем

$$\frac{1}{2}\omega_{0,12} = eA_0, \tag{7}$$

а пространственные компоненты составляют обобщенную сверхтекучую скорость с отличным от нуля ротором

$$v_i = \frac{1}{2}\omega_{i,12} = \frac{1}{2}(e_{1i}\partial_k e_2^k - e_{2i}\partial_k e_1^k), \tag{8}$$

которая на равновесном вакуумном многообразии (3) является потенциальной: $\mathbf{v}^{eq} = \frac{1}{2}\vec{\nabla}\Phi$.

Поднимание и опускание орбитальных индексов осуществляется метрическим тензором $g^{\mu\nu} = e^\mu_a e^\nu_a$.

Уравнение (5), (6) инвариантно относительно калибровочного преобразования $U(1)$, при котором

$$\psi \to e^{i\tau_3\alpha}\psi, \quad e^i_1 + ie^i_2 \to e^{2i\alpha}(e^i_1 + ie^i_2), \quad A_0 \to A_0 + \frac{1}{e}\frac{\partial\alpha}{\partial t}, \quad \mathbf{v} \to \mathbf{v} + \vec{\nabla}\alpha. \tag{9}$$

Согласно работе [8] интегрирование по фермионам, удовлетворяющим уравнению (6), приводит к искомому эффективному действию (1) для спиновой связности с топологическим зарядом

$$q_{gr} = \frac{1}{2}\ \frac{1}{16}\ \mathrm{sign}(M), \tag{10}$$

где дополнительный по сравнению с [8] коэффициент 1/2 компенсирует удвоение степеней свободы, возникающее при переходе от частиц к боголюбовским частицам и дыркам. Таким образом скачок при изменении знака M, а, следовательно, при прохождении одного из уровней через уровень Ферми, равен $\Delta q = \frac{1}{16}$, а сам скачок в действии, выраженный через переменные в ^{3}He-A, имеет вид

$$\Delta S = \frac{1}{24\pi}\int d^2x dt e^{ij}(eA_0\partial_i v_j + v_i\partial_j eA_0 + v_j\partial_t v_i). \tag{11}$$

Это выражение относится к адиабатическим инвариантам типа члена Черна–Саймонса, поскольку содержит в явном виде калибровочное поле A_0, но тем не менее является калибровочно инвариантным. Коэффициенты при таких членах не могут зависеть от пространственно-временных координат и, следовательно, не могут меняться при адиабатическом изменении системы. Это одна из причин квантования коэффициента при таком члене. Поэтому уравнение (11) можно распространить и на случай взаимодействующих уровней поперечного движения, а также из него можно восстановить и полное действие Черна–Саймонса, для случая, когда под уровнем Ферми находятся N уровней поперечного движения (с учетом спина):

$$S = \frac{N}{24\pi}\int d^2x dt e^{ij}(eA_0\partial_i v_j + v_i\partial_j eA_0 + v_j\partial_t v_i). \tag{12}$$

Причем в случае сильно взаимодействующих уровней, когда понятие числа уровней под химпотенциалом теряет смысл, уравнение (12) сохраняется, только в качестве N войдет топологический инвариант от функции Грина в пространстве импульсов $k_\mu = (\omega, k_x, k_y)$ [4,7]:

$$N = \frac{1}{24\pi^2} e^{\mu\nu\lambda}\int dk_x dk_y d\omega \mathrm{Tr}\{G\partial_\mu G^{-1} G\partial_\nu G^{-1} G\partial_\lambda G^{-1}\}, \tag{13}$$

который скачкообразно меняется при прохождении химпотенциала через дьявольскую (коническую) точку в спектре фермионов. Существование такого внутреннего инварианта состояния является второй причиной квантования физического параметра.

Члены в действии, не содержащие калибровочное поле в явном виде, или содержащие его в калибровочно инвариантном виде, например, в комбинации с v_μ, т.е. в виде $(eA_\mu - v_\mu)$, не испытывают скачка при переходе через дьявольскую точку. Коэффициенты при них могут зависеть от координат и времени. Это относится и к члену вида

$$\int d^2x dt\, \sigma_{xy} e^{ij}(v_0 - eA_0)\partial_i(v_j - eA_j)$$

найденному в [7], который описывает внутренний эффект Холла. Как и показано в [7], холловская проводимость σ_{xy} квантуется лишь приближенно, в меру малости Δ/ϵ_F, в то время как коэффициент в члене (12) квантуется точно.

Интересным следствием формулы (11) является то, что фермионный заряд вихря с p квантами циркуляции, т.е. с $\oint \mathbf{v} d\mathbf{x} = p\pi$, меняется при изменении топологического инварианта N на величину $p/24$.

Литература

1. *Lerda A., van Nieuwenhuizen.* Phys. Rev. Lett., 1989, **62**, 1217.
2. *Kohmoto M.* Ann. Phys., 1985, **160**, 343.
3. *Wilczek F., Zee A.* Phys. Rev. Lett., 1983, **51**, 2250.
4. *Volovik G.E., Yakovenko V.M.*. J. Phys.: Condens. Mat., 1989, **1**, 5263.
5. *Yakovenko V.M.* Phys. Rev. Lett., 1990, **64**, in press.
6. *Wen X.G. et al.* Phys. Rev. B, 1989, **39**, 11413.
7. *Воловик Г.Е.* ЖЭТФ, 1988, **94**, вып. 9, 123.
8. *Van der Bij J. et al.* Phys. Lett. B, 1986, **179**, 87.

Институт теоретической физики им. Л.Д.Ландау
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
25 декабря 1989 г.