Письма в ЖЭТФ, том 86, вып. 3, с. 216 – 220 © 2007 г. 10 августа

Спиновые волны в неполяризованных холодных газах

Т. Л. Андреева, П. Л. Рубин[1)]

Физический институт им. П.Н. Лебедева РАН, 119991 Москва, Россия

Поступила в редакцию 5 июня 2007 г.

В настоящей работе предсказан новый тип спиновых волн в парамагнитных газах с невырожденной по энергии системой уровней. Такие волны возникают без обычно используемой внешней поляризации газа только за счет создания неравновесных заселенностей рабочих уровней. Получен закон дисперсии этих спиновых волн.

PACS: 34.10.+x, 51.10.+y, 51.60.+a

Введение. До сих пор спиновые волны наблюдались только в поляризованных газах на переходах между спиновыми подуровнями основного состояния (атомарный водород, He^3, квазичастицы в слабых растворах He^3–He^4 [1]). В последние годы вновь возник интерес к спиновым волнам в парамагнитных газах (см. обзор [2] и ссылки в нем). Это связано с наблюдением сильных спиновых волн в охлажденных поляризованных парах рубидия на переходе между невырожденными уровнями сверхтонкой структуры атома. В этих экспериментах с парами рубидия в магнитной ловушке была достигнута температура газа $T \sim 0.6$ мкК. При этом энергия сверхтонкого расщепления (6.8 ГГц) была много больше температуры газа [3, 4]. Как будет показано далее, в условиях этих экспериментов может проявиться новый механизм возникновения спиновых волн, связанный с неравновесной заселенностью уровней.

Спиновые волны в парах рубидия до сих пор широко обсуждаются в литературе (см. работы [2, 5] и ссылки в них]). Однако в теоретических работах на эту тему фактически не используется точная структура интеграла столкновений с полным набором внутренних степеней свободы взаимодействующих атомов (сверхтонкая структура термов и спин). Либо приводится общая форма интеграла столкновений [5], но в громоздкой форме, которая затрудняет получение конкретных результатов, либо берется упрощенная модельная форма интеграла столкновений для выполнения численных расчетов [2]. В настоящей работе выводится точное уравнение Больцмана для парамагнитных атомов с учетом двух уровней энергии.

Интеграл столкновений для парамагнитных газов с невырожденной системой уровней. В настоящей работе рассматривается свободный (без ловушки) больцмановский газ со спином $1/2$ и сверхтонким расщеплением основного состояния. В нашей предыдущей работе был вычислен больцмановский интеграл столкновений в парамагнитном газе с учетом термов основного состояния [6]. Полученные выражения довольно громоздки, особенно при учете полюсных членов, которые, однако, исчезают, если пренебречь диссипацией спина. В настоящей работе, как и ранее, диссипация спина не учитывается. Ответственным за возникновение спиновой волны в поляризованном парамагнитном газе с вырожденной системой уровней является мнимое слагаемое в члене ухода интеграла столкновений, пропорциональное степени поляризации газа, и именно оно определяет закон дисперсии спиновой волны. Все остальные члены интеграла столкновений описывают только диффузионное затухание спинового магнитного момента. Как будет показано далее, для атомов с невырожденной системой уровней мнимое слагаемое, определяющее возможность существования спиновой волны, возникает и за счет неравновесной заселенности рабочих уровней даже без внешней поляризации газа. Сверхтонкое расщепление – релятивистский эффект с весьма малой радиационной вероятностью перехода, что облегчает создание неравновесной заселенности подуровней в течение достаточно длительного времени.

Речь пойдет об атомах со спином $1/2$ и сверхтонким расщеплением основного состояния. Функция Вигнера атомов с невырожденной системой уровней в дополнение к спиновым индексам α и β (сравни [6]), содержит квантовые числа a и b, обозначающие энергетические термы атомов. Функцию Вигнера такой системы можно записать следующим образом:

$$f_{a\alpha,b\beta}(x,p) = \frac{nC(p)}{2} \times \\ \times \left(\delta_{\alpha\beta}\varphi_{ab}(x,p) + \sigma^i_{\alpha\beta}M^i_{ab}(x,p)\right). \qquad (1)$$

[1)]e-mail: rubin@sci.lebedev.ru

Здесь x и p – координата и импульс частицы, индексы a и b нумеруют термы атомов (температура газа предполагается низкой, и другие термы не рассматриваются); α и β – проекции спина атома на ось квантования, принимающие значения $\pm 1/2$. Для обозначения спиновых индексов здесь и далее используются греческие буквы. Плотность атомов обозначается n (см$^{-3}$), $C(p)$ – максвелловская функция распределения атомов по импульсам, нормированная на 1. Матрицы $\varphi_{ab}(x,p)$ и $M^i_{ab}(x,p)$ безразмерны (предполагается, что магнитный момент выражен через магнетон Бора, а φ_{aa} и φ_{bb} – это относительные заселенности частиц в состояниях a и b, соответственно); $\sigma^i_{\alpha\beta}$ – вектор матриц Паули. По повторяющимся индексам подразумевается суммирование. Нормировка $\varphi_{ab}(x,p)$ и $M^i_{ab}(x,p)$ дается условиями: $\mathrm{Tr}[\varphi_{ab}(x,p)] = 1$, $\mathrm{Tr}\left[M^i_{ab}(x,p)\right] \le g$ (g – гиромагнитное отношение).

Матрица магнитного момента в поляризованном газе может быть записана следующим образом:

$$M^i_{ab}(x,p) = M_{ab}\delta_{i3} + \mu^i_{ab}(x,p) \tag{2}$$

Здесь предполагается, что внешняя поляризация создается вдоль оси z некоторой декартовой системы координат (с чем связано появление множителя δ_{i3}). Внешняя поляризация характеризуется матрицей M_{ab}. При $\mathrm{Tr}[M_{ab}] = g$ имеет место полная поляризация атомов; $\mu^i_{ab}(x,p)$ – матричный элемент магнитного момента перехода атома между уровнями энергии a и b.

Функция Вигнера описывается кинетическим уравнением с больцмановским интегралом столкновений:

$$\frac{\partial f_{AB}(p)}{\partial t} + \frac{p\nabla f_{AB}(p)}{m} + \\ + \frac{i}{\hbar}\left(E_a - E_b\right) f_{AB}(p) = \mathrm{St}_{AB}(p). \tag{3}$$

Здесь $A = \{a,\alpha\}$ и $B = \{b,\beta\}$ – собирательные индексы, включающие в себя как энергетические, так и спиновые индексы; E_a и E_b – уровни энергии термов; $\mathrm{St}_{AB}(p)$ – интеграл столкновений [6]. Ради упрощения обозначений проекции спина $1/2$ и $-1/2$ заменяются цифрами 1 и 2, соответственно. Удобно перейти к циклическим компонентам спинового момента $\mu_\pm(p) = \mu_x(p) \pm i\mu_y(p)$, поскольку в поляризованном газе именно они являются собственными функциями интеграла столкновений, которые могут распространяться в виде спиновых волн. Ради краткости координата точки x явно в (3) не указана.

Несмотря на очень низкие температуры газа ($T \sim \sim 0.6$ мкК для паров рубидия), больцмановское приближение в интеграле столкновений остается применимым вследствие низкой плотности газа ($n = = 1.8 \cdot 10^{13}$ см$^{-3}$). Критерий применимости больцмановского приближения [7] имеет вид

$$\mu/T \ll 1 \tag{4}$$

и для рубидия в условиях эксперимента [3] выполняется с достаточным запасом:

$$\mu/T = n\left(\hbar^2/mT\right)^{3/2} \approx 0.01. \tag{5}$$

Здесь μ – химический потенциал газа, T – температура в энергетических единицах.

Рассмотрим интеграл столкновений подробнее. В общем случае член ухода имеет следующий вид:

$$\mathrm{St}^o_{a\alpha,b\beta}(p) = 8i\pi^3\hbar^2 \times \\ \times \int \Bigg(- f_{q\lambda,g\gamma}\left(x,p'\right) f_{t\tau,b\beta}(x,p) \times \\ \times T_{ag,tq}\left(\alpha,\gamma,\frac{1}{2}\left(p-p'\right),\tau,\lambda,\frac{1}{2}\left(p-p'\right)\right) + \\ + f_{a\alpha,t\tau}(p) f_{g\gamma,q\lambda}\left(p'\right) \times \\ \times T^*_{bg,tq}\left(\beta,\gamma,\frac{1}{2}\left(p-p'\right),\tau,\lambda,\frac{1}{2}\left(p-p'\right)\right)\Bigg)dp'. \tag{6}$$

Здесь $T_{ab,cd}(\alpha,\beta,P,\gamma,\delta,Q)$ – матричный элемент T-матрицы, описывающей процесс рассеяния $\{a,\alpha\}+\{b,\beta\} \to \{c,\gamma\} + \{d,\delta\}$, индексы используются так же, как и в обозначении матрицы Вигнера, P и Q – импульсы частиц в системе центра инерции до и после столкновения. Использована запись члена ухода через элементы T-матрицы, описывающие рассеяние частиц на нулевой угол [8, 6]. Спиновая волна возникает из-за взаимодействия противоположно направленных спинов.

В неравновесных условиях (внешняя поляризация парамагнитного газа) основную роль в уравнении для спиновой волны играет мнимая часть члена ухода $\mathrm{St}^o_{a\alpha,b\beta}(p) = \mathrm{St}^o_{AB}(p)$. Вещественная часть $\mathrm{St}^o_{AB}(p)$, согласно оптической теореме, определяет коэффициент диффузии спина, то есть его затухание, в то время как мнимая часть интеграла столкновений обеспечивает возможность распространения спиновой волны [6]. При низких температурах отношение мнимой и вещественной частей интеграла столкновений пропорционально отношению дебройлевской длины волны λ_B к характерной длине рассеяния. Так для рубидия при $T \approx 1$ мкК соответствующее отношение составляет примерно 200. При этом амплитуды рассеяния (и матричные элементы T-матрицы) с хорошей точностью можно считать вещественными [2, 7]. Отметим, что в газах с невырожденной системой уровней спиновая волна возникает только в поляризованном газе. В настоящей работе рассматривается другой механизм возникновения спиновой волны в газах с невырожденной системой уровней, не требующий внешней поляризации газа. Этот механизм возникает при неравновесной заселенности рабочих подуровней.

Как известно, спиновая волна возникает из-за взаимодействия противоположно направленных спинов. В поляризованном газе независимые типы колебаний образуют величины $\mu_\pm = \mu_x \pm i\mu_y$ (циркулярно поляризованные компоненты спинового магнитного момента при направлении внешней поляризации вдоль оси z). В неполяризованном газе скорость спиновой волны не зависит от поляризации газа. Для определенности и ради сравнения с экспериментальными данными о спиновых волнах в рубидии [3] рассматривается компонента $\mu_- = \mu_x - i\mu_y$. Рассмотрим уравнение для элемента $f_{a1,b2}(p)$ матрицы Вигнера, который как раз и описывает динамику этой циркулярно поляризованной спиновой волны на частоте перехода между уровнями a и b.

Итак, необходимо вычислить член ухода I^o больцмановского интеграла столкновений парамагнитного газа с двумя уровнями энергии. При наличии внешней поляризации газа член ухода удобно представить в виде суммы:

$$I^o = I^o_\mu + I^o_M. \tag{7}$$

Здесь первое слагаемое представляет собой член ухода в отсутствие внешней поляризации, тогда как второе слагаемое внешнюю поляризацию газа учитывает.

Далее производится линеаризация интеграла столкновений согласно формулам (1) и (2) с сохранением слагаемых, содержащих магнитный момент атома. Предполагается, что в столкновениях парамагнитных атомов выполняются законы сохранения спина и энергии внутренних состояний. При этом терм I^o_μ (см. формулу (7)), не связанный с внешней поляризацией газа, принимает вид

$$\begin{gathered} I^\mu_{a1b2}[p,x] = 4in\pi^3\hbar^2 C(p)C(p_1) \times \\ \times \left[\mu_-(a,b,p_1)(\varphi(b,b,p)T_{ab,ba}(1,2,P,2,1,P) - \right. \\ - \varphi(a,a,p)T^*_{ba,ab}(2,1,P,1,2,P)) + \\ + \mu_-(a,b,p)(\varphi(a,a,p_1)T_{aa,aa}(1,1,P,1,1,P) + \\ + T_{aa,aa}(1,2,P,1,2,P) - T^*_{ba,ba}(2,1,P,2,1,P) - \\ - T^*_{ba,ba}(2,2,P,2,2,P)) + \\ + \varphi(b,b,p_1)(T_{ab,ab}(1,1,P,1,1,P) + \\ + T_{ab,ab}(1,2,P,1,2,P) - \\ \left. - T^*_{bb,bb}(2,1,P,2,1,P) - T^*_{bb,bb}(2,2,P,2,2,P))\right]. \end{gathered} \tag{8}$$

При низких температурах (для рубидия при $T \approx 1$ мкК) дебройлевская длина волны λ_B превышает длину рассеяния примерно в 200 раз (см. выше). При этом амплитуды рассеяния (и матричные элементы T-матрицы) с хорошей точностью можно считать вещественными [2, 7].

Теперь воспользуемся инвариантной формой записи T-матрицы:

$$\begin{gathered} T_{ab,cd}(\alpha,\beta,P,\lambda,\mu,Q) = \\ = t_{ab,cd}(P,Q)\delta_{\alpha\lambda}\delta_{\beta\mu} + \theta_{ab,cd}(P,Q)\sigma^i_{\alpha\lambda}\sigma^i_{\beta\mu}. \end{gathered} \tag{9}$$

Учет тождественности сталкивающихся атомов в предположении низких температур газа (s-рассеяние) приводит к следующим соотношениям для матричных элементов:

$$t_{ba,ba} = t_{ab,ab};\ \theta_{ba,ba} = \theta_{ab,ab};\ \theta_{ab,ba} = \theta_{ba,ab}. \tag{10}$$

Здесь ради краткости опущены импульсы сталкивающихся атомов, поскольку имеется в виду, что амплитуды рассеяния можно считать не зависящими от скоростей.

При сверхтонком расщеплении уровней можно считать амплитуды упругого рассеяния атомов не зависящими от энергии термов. В таком случае с хорошей точностью можно считать

$$t_{aa,aa} = t_{bb,bb} = t;\ \theta_{aa,aa} = \theta_{bb,bb} = \theta. \tag{11}$$

С учетом этого предположения нетрудно получить для фермионов

$$\begin{gathered} I^\mu_{a1b2}[p,x] = 4in\pi^3 C(p)C(p_1) \times \\ \times \Big(\mu_-(a,b,p_1)(\varphi(b,b,p) - \varphi(a,a,p)) \times \\ \times (-t_{ab,ab} + 2\theta_{ab,ba} + \theta_{ba,ba}) + \\ + \mu_-(a,b,p)(\varphi(b,b,p_1) - \varphi(a,a,p_1)) \times \\ \times (2t_{ab,ab} - t_{ba,ab} - t - 3\theta_{ba,ab} + 3\theta)\Big). \end{gathered} \tag{12}$$

Для бозонов соответствующая формула принимает вид

$$\begin{gathered} I^\mu_{a1b2}[p,x] = 4in\pi^3\hbar^2 C(p)C(p_1) \times \\ \times \Big(\mu_-(a,b,p_1)(\varphi(b,b,p) - \varphi(a,a,p)) \times \\ \times (t_{ba,ba} + 2\theta_{ab,ba} - \theta_{ba,ba}) + \\ + \mu_-(a,b,p)\left(\varphi(b,b,p_1) - \varphi(a,a,p_1)\right) \times \\ \times (t_{ab,ba} + 2t_{ba,ba} - 3t + 3\theta_{ab,ba} - 3\theta)\Big). \end{gathered} \tag{13}$$

В этих формулах симметрия волновых функций относительно перестановок двух сталкивающихся частиц уже учитывается.

Можно показать, что для невырожденной системы подуровней вычисление величины I_M^o дает тот же результат, что и I_μ^o, только с заменой $\varphi(b,b,p) - \varphi(a,a,p)$ на $(M_{aa}^3 + M_{bb}^3)$. Однако в случае поляризованного газа I_M^o относится только к циркулярной поляризации магнитного момента, в то время как I_μ^o от поляризации газа уже не зависит.

Отметим, что несмотря на сходство интегралов столкновений I_M^o и I_μ^o, они описывают разные механизмы возникновения спиновых волн. Первое слагаемое относится к спиновым волнам в поляризованных газах, тогда как второе описывает новое явление – спиновую волну в неполяризованных газах с неравновесной заселенностью рабочих уровней.

Теперь обратимся к дисперсионному уравнению для спиновых волн. Оно вытекает из уравнений (3), (12) и (13) и имеет следующий вид:

$$(kv - \omega + \omega_{ab} + \nu_1)\mu(p) = \nu_2 \int f(p_1)\mu(p_1)dp_1. \quad (14)$$

В отличие от случая атомов с вырожденной системой рабочих уровней в поляризованном газе (где распространяются спиновые волны циркулярной поляризации), теперь уравнение описывает волны любой поляризации, поскольку среда в данном случае изотропна. Кроме того, коэффициенты ν_1 и ν_2 теперь различны. Для фермионов

$$\nu_1 = 4n\pi^3\hbar^2\,(2t_{ab,ab} - t_{ba,ab} - t - 3\theta_{ba,ab} + 3\theta) \times \\ \times (\varphi(b,b) - \varphi(a,a)), \quad (15)$$

$$\nu_2 = 4n\pi^3\hbar^2\,(-t_{ba,ba} + 2\theta_{ab,ba} + \theta_{ba,ba}) \times \\ \times (\varphi(b,b) - \varphi(a,a)), \quad (16)$$

а для бозонов

$$\nu_1 = 4n\pi^3\hbar^2\,(t_{ab,ba} + 2t_{ba,ba} - 3t + 3\theta_{ab,ba} - 3\theta) \times \\ \times (\varphi(b,b) - \varphi(a,a)), \quad (17)$$

$$\nu_2 = 4n\pi^3\hbar^2\,(t_{ba,ba} + 2\theta_{ab,ba} - \theta_{ba,ba}) \times \\ \times (\varphi(b,b) - \varphi(a,a)). \quad (18)$$

Решение уравнения в длинноволновом пределе $(\nu_1 \gg kv, \nu_2 \gg kv)$ имеет следующий вид:

$$\omega - \omega_0 = -k^2\bar{v}^2/3\nu_2, \quad (19)$$

где

$$\omega_0 = \omega_{ab} + \nu_1 - \nu_2$$

и ω_{ab} — частота перехода между термами a и b.

Отличие от случая вырожденного перехода состоит в том, что в формулах (15)–(18) теперь содержатся две частоты столкновений – ν_1 и ν_2 (ранее была одна [6]). Первая из них определяет дополнительный сдвиг частоты спиновой волны относительно частоты перехода ω_{ab}, а вторая задает саму частоту спиновой волны (см. (19)). Теперь в интеграл столкновений дает вклад процесс резонансного обмена энергиями между рабочими уровнями в столкновениях между атомами с противоположно направленными спинами (слагаемые $t_{ab,ba}$ и $\theta_{ab,ba}$).

Обсуждение. Основным результатом настоящей работы является предсказание нового типа спиновых волн в парамагнитных газах с невырожденной системой уровней в отсутствие внешней поляризации. Необходимым условием существования таких волн является неравновесная заселенность рабочих уровней: величина $\Delta\varphi = \varphi(a,a) - \varphi(b,b) \neq 0$. Дисперсионное соотношение для этих волн дается формулой (19). Скорость волн не зависит от их поляризации. В случае поляризованного газа, как известно, существуют только циркулярно поляризованные спиновые волны.

Отметим, что при достаточно низких температурах заселен только нижний уровень перехода. В частности, в парах рубидия при $T = 0.6$ мкК заселение верхнего уровня сверхтонкого перехода осуществлялось с помощью радиочастотного генератора, причем мощность генератора подбиралась таким образом, чтобы выравнять заселенности подуровней ($\pi/2$-импульс) [2]. При этом величина $\Delta\varphi \approx 0$, и описываемые в настоящей работе волны, по-видимому, не возникают. Оптимальное условие для возникновения нового типа волн – это $\Delta\varphi \approx 1$. Для конкретных переходов необходимо учитывать поправку на статистические веса уровней.

Важно отметить, что в парах рубидия получены аномально сильные спиновые волны [2, 3]. Это означает, что величина ν_2, которая теперь включает и резонансный обмен возбуждениями, достаточно велика. Следует подчеркнуть, что величина ν_2 определяет возможность существования спиновых волн как в поляризованном, так и в неравновесном неполяризованном газе (см. выше). В связи с этим следует ожидать возникновения достаточно сильных спиновых волн нового типа (без поляризации газа) при неравновесной заселенности уровней: $\Delta\varphi \approx 1$ (см. (14)).

Авторы благодарят И.Л. Бейгмана за полезное обсуждение процессов резонансного обмена возбуждениями тождественных частиц. Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант # 05-02-17460).

1. Е. П. Башкин, УФН **148**, 433 (1986).
2. J. N. Fuchs, D. M. Cangardt, and F. Laloë, Eur. Phys. J. D **25**, 5775 (2003).
3. J. M. McGuirk, H. J. Lewandowski, D. M. Harber et al., Phys. Rev. Lett. **89**, 090402 (2002).
4. H. J. Lewandowski, D. M. Harber, D. L.Whitaker, and E. A. Corner, Phys. Rev. Lett. **88**, 070403 (2002).
5. W. J. Mullin and R. J. Ragan, J. Low Temp. Phys. **138**, 73 (2005).
6. Т. Л. Андреева, П. Л. Рубин, ЖЭТФ **129**, 863 (2006).
7. Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшиц, *Статистическая физика*, часть 1, М.: Физматлит, 1976.
8. L. Waldmann, Z. Naturforsch. **13a**, 609 (1958).