Письма в ЖЭТФ, том 51, вып. 4, стр. 184–187 25 февраля 1990 г.

ПРОИЗВОДЯЩАЯ ФУНКЦИЯ КОРРЕЛЯТОРОВ В 2*d*-КОНФОРМНОЙ ТЕОРИИ И КОНСТРУКЦИЯ СУГАВАРЫ ИЗ 2 + 1-ТЕОРИИ ЧЕРНА–САЙМОНСА

Я.И.Коган, В.В.Фок

Используя инвариантность вакуумной волновой функции 2 + 1-теории Черна–Саймонса относительно диффеоморфизмов и калибровочных преобразований, построена производящая функция корреляторов токов в модели *WZW*.

1. В работах [1, 2] была обнаружена связь между $2d$-конформной моделью WZW и 2 + 1-теорией Черна–Саймонса (CS), что приводит к совершенно новому взгляду на конформные теории. Целью настоящей работы является построение производящей функции для киральных токов $J(z)$ и тензора энергии – импульса $T(z)$ в модели WZW как волновой функции вакуумного состояния теории CS, при этом автоматически возникает конструкция Сугавары $T(z) = \frac{1}{k+c_v} : J(z)J(z):$, необходимая для изучения конформных свойств WZW [3].

Пусть G – полупростая вещественная группа Ли, $\mathcal{G}$ – соответствующая алгебра Ли, M – трехмерное многообразие с краем ∂M. Рассмотрим действие Черна–Саймонса

$$S = \frac{k}{4\pi}\mathrm{Tr}\int_M (AdA + \frac{2}{3}A^3) = \frac{k}{4\pi}\mathrm{Tr}\int_M d^3x\,\epsilon^{\mu\nu\lambda}(A_\mu\partial_\nu A_\lambda + \frac{2}{3}A_\mu A_\nu A_\lambda), \tag{1}$$

где $A_\mu = A^a_\mu T^a$, а $\mathrm{tr}\,T^aT^b = 1/2\delta^{ab}$.

С точностью до граничных членов действие (1) инвариантно относительно калибровочных преобразований

$$A \to g^{-1}Ag + ig^{-1}dg \qquad \text{или} \qquad A_\mu \to g^{-1}A_\mu g + ig^{-1}\partial_\mu g\,,$$

здесь g – функция на M со значениями в G; и относительно диффеоморфизмов f многообразия M.

Инфинитезимально эти преобразования имеют вид:

$$\begin{aligned} g:&\qquad A \to A + d\epsilon - i\,[A,\epsilon] \\ f:&\qquad A \to A + L_v A, \end{aligned} \tag{2}$$

или в компонентах

$$\begin{aligned} A^a_\mu &\to A^a_\mu + \partial_\mu\epsilon^a + f^{abc}A^b_\mu\epsilon^c \\ A^a_\mu &\to A^a_\mu + v^\nu\partial_\nu A^a_\mu + A^a_\nu\partial_\mu v^\nu, \end{aligned} \tag{3}$$

где $\epsilon = \epsilon^aT^a$ – функция со значениями в $\mathcal{G}$, а $v = v^\mu\partial_\mu$ – векторное поле на M, касательное к краю ∂M. Этим преобразованиям по теореме Нетер отвечают сохраняющиеся величины – генераторы соответствующих преобразований

$$\begin{aligned} H_\epsilon &= -\frac{ik}{4\pi}\int_{\partial M} d^2x\,\epsilon^a\epsilon^{ij}F^a_{ij}\,; \qquad \epsilon^{ij}F^a_{ij} = \epsilon^{ij}(\partial_i A^a_j + f^{abc}A^b_i A^c_j), \\ H_v &= \frac{ik}{2\pi}\int_{\partial M} v^k A^a_k\,\epsilon^{ij}\partial_i A^a_j\,d^2x\,. \end{aligned} \tag{4}$$

2. Будем квантовать теорию Черна – Саймонса используя голоморфное представление [4–6], эквивалентное каноническому квантованию в представлении Шредингера низкоэнергетического предела топологически массивной теории [7, 8]. Для этого выберем на ∂M комплексную структуру τ и соответствующую комплексную координату z, что позволяет представить 1-форму $A_i dx^i$ на ∂M в виде суммы $(1, 0)$ формы $A dz$ и $(0, 1)$ формы $\bar{A}\, d\bar{z}$. Гильбертовым пространством состояний $\mathcal{H}$ будет пространство аналитических функций (функционалов) $F(A)$ на пространстве форм типа $(1, 0)$. Скалярное произведение на $\mathcal{H}$ задается континуальным интегралом

$$\langle F(A), G(A)\rangle = \int DAD\bar{A}\, e^{-\frac{k}{\pi}\int_{\partial M} A\bar{A}}\, \overline{F(A)}\, G(A), \tag{5}$$

определяющееся комутатором $[A(x), \bar{A}(y)] = \frac{\pi}{k}\delta(x-y)$, вытекающим из (1), функции $\bar{A}(x)$ соответствует оператор $\frac{\pi}{k}\frac{\delta}{\delta A(x)}$. Квантовые аналоги (4) суть

$$\begin{aligned} H_\epsilon &= -\frac{k}{\pi}\,\mathrm{tr}\int_{\partial M}\left(\bar{\partial}\epsilon A - \frac{\pi}{k}\partial\epsilon\frac{\delta}{\delta A} + \frac{\pi}{k}[\epsilon, A]\frac{\delta}{\delta A}\right),\\ H_v &= \frac{k}{\pi}\,\mathrm{tr}\int_{\partial M}\left(\bar{\partial}A - \frac{2\pi}{k}\partial\frac{\delta}{\delta A}\right)\left(Av + \frac{2\pi}{k}\bar{v}\frac{\delta}{\delta A}\right). \end{aligned} \tag{6}$$

3. Рассмотрим в пространстве $\mathcal{H}$ множество векторов

$$\chi_{\mu,\xi}(A) = \exp\left\{\frac{k}{2\pi}\,\mathrm{Tr}\int_{\partial M}\mu A^2 + k\,\mathrm{Tr}\int_{\partial M}\xi A\right\} \tag{7}$$

зависящих от функциональных параметров μ и ξ, где $\xi = \xi^a T^a$ – $\mathcal{G}$-значный $(0, 1)$-дифференциал, а μ – $(-1, 1)$-дифференциал (дифференциал Бельтрами), удовлетворяющий условию $|\mu| < 1$. Заметим, что такой дифференциал Бельтрами определяет на ∂M другую комплексную структуру, а именно ту, в которой 1-форма $dz + \mu d\bar{z}$ имеет тип $(1, 0)$. Условие $|\mu| < 1$ гарантирует невещественность этой формы.

Пусть $\mathcal{H}'$ – пространство аналитических функционалов от μ и ξ. Определим отображение $\mathcal{H} \to \mathcal{H}'$ с помощью скалярного произведения $F(A) \to \Phi_F(\mu, \xi) = \langle F(A), \chi_{\mu,\xi}(A)\rangle$. Переход от $\mathcal{H}$ к $\mathcal{H}'$ можно рассматривать, как замену базиса в $\mathcal{H}$. Действие операторов на $\mathcal{H}$ переносится в действие на $\mathcal{H}'$ следующим образом

$$\hat{X}\,\Phi_F(\mu, \xi) = \Phi_{XF}(\mu, \xi) = \langle F(A), X^*\chi_{\mu,\xi}(A)\rangle,$$

где X – оператор на $\mathcal{H}$. Легко проверить, что операторы (6) в (μ, ξ) представлении имеют вид

$$\begin{aligned} \hat{H}_\epsilon &= \mathrm{Tr}\int_{\partial M}\left(\bar{\partial} - \mu\partial - ad_\xi\right)\epsilon\frac{\delta}{\delta\xi} - k/_\pi\,\mathrm{Tr}\int_{\partial M}\xi\partial\epsilon,\\ \hat{H}_v &= \int_{\partial M}(\bar{\partial} - \mu\partial + \partial\mu)(v + \mu\bar{v})\frac{\delta}{\delta\mu} + \mathrm{Tr}\int_{\partial M}\left[(v\partial + \bar{v}\bar{\partial} + (\bar{\partial} - \mu\partial)\bar{v})\xi\frac{\delta}{\delta\xi} + \frac{k}{\pi}\bar{v}\xi\partial\xi\right] - \\ &\quad - \frac{c}{12\pi}\int_{\partial M}(v + \mu\bar{v})\partial^2\mu \end{aligned} \tag{8}$$

При этом необходима регуляризация, которая не нарушает естественные комутационные соотношения

$$[H_{v_1}, H_{v_2}] = H_{[v_1, v_2]}, \qquad [H_{\epsilon_1}, H_{\epsilon_2}] = H_{[\epsilon_1, \epsilon_2]}, \qquad [H_v, H_\epsilon] = H_{L_v \epsilon}.$$

Константа c может быть любой, в частности при регуляризации с помощью раздвижки точек $c = 0$.

Очевидно, что вакуумное состояние теории должно быть инвариантно относительно преобразований симметрии (2), а значит его волновая функция Φ_0 в (μ, ξ) – представлении должна удовлетворять уравнениям

$$\hat{H}_\epsilon \Phi_0(\mu, \xi) = \hat{H}_v \Phi_0(\mu, \xi) = 0. \tag{9}$$

Используя явный вид операторов $\hat{H}_\epsilon$ и $\hat{H}_v$ в (μ, ξ) – представлении (8) можно показать, что функция Φ_0 является производящей функцией корреляторов киральных токов и тензора энергии – импульса в конформной теории WZW, при $c = \dfrac{k \dim G}{k + c_v}$. То есть

$$(4\pi i)^m \frac{1}{\Phi_0} \frac{\delta}{\delta \xi^{a_1}(z_1)} \cdots \frac{\delta}{\delta \xi^{a_n}(z_n)} \frac{\delta}{\delta \mu(w_1)} \cdots \frac{\delta}{\delta \mu(w_m)} \Big|_{\xi = 0} =$$

$$= \langle J^{a_1}(z_1) \ldots J^{a_n}(z_n) T(w_1) \ldots T(w_m) \rangle , \tag{10}$$

где коррелятор в правой части отвечает комплексной структуре, задаваемой μ. Эта формула написана для ∂M рода 0, без отмеченных точек, когда Φ_0 определяется уравнениями (9) однозначно. В случае поверхностей с отмеченными точками и/или высших родов возникает конечномерное пространство вакуумных волновых функций, изоморфное пространству конформных блоков соответствующей конформной теории. Явный изоморфизм задается формулой (10).

Для доказательства равенства (10) достаточно проверить следующие соотношения

$$\pi^2 \frac{\delta}{\delta \xi^a(z)} \frac{\delta}{\delta \xi^b(w)} \Phi_0 = \Phi_0 \frac{k \delta^{ab} \partial u(z) \partial u(w)}{(u(z) - u(w))^2} + \frac{\pi f^{abc} \partial u(z)}{u(z) - u(w)} \frac{\delta \Phi_0}{\delta \xi^c(z)} + O(1) \tag{11 a}$$

$$\pi^2 : \frac{\delta}{\delta \xi^2} : \Phi_0 = \pi^2 \lim_{z \to w} \operatorname{tr} \frac{\delta}{\delta \xi(z)} \frac{\delta \Phi_0}{\delta \xi(w)} - \frac{k \dim G}{(u(z) - u(w))^2} \partial u(z) \partial u(w) \Phi_0 +$$

$$+ k \frac{\dim G}{6} s(u) \Phi_0) = (2\pi) (k + c_v) \frac{\delta \Phi_0}{\delta \mu(z)}, \tag{11 b}$$

$$[: \frac{\delta^2}{\delta \xi^2} : \frac{\delta}{\delta \mu}] = 0 \tag{11 c}$$

где c_v – дуальное число Кокстера алгебры $\mathcal{G}$, $\mu = \dfrac{\bar{\partial} u}{\partial u}$,

а производная Шварца $s(u) = \partial^3 u / \partial u - \dfrac{3}{2} \left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial u} \right)^2$. Соотношения (11) отвечают операторному разложению киральных токов Каца–Муди

$$J^a(u_1)J^b(u_2) = \frac{k\delta^{ab}}{(u_1-u_2)^2} + \frac{f^{abc}J^c(u_1)}{u_1-u_2} + O(1)$$

и конструкции Сугавары

$$T(u) = \frac{1}{k+c_V} :J^a(u)J^a(u):$$

при этом $\delta/\delta\xi^a(z) \to J^a(z)$, . $\delta/\delta\mu(z) \to T(z)$.

Заметим, что наивно из (7) следует соотношение $\delta^2\Phi_0/\delta\xi\delta\xi = .k\frac{\delta\Phi_0}{\delta\mu}$. Перенормировка $k \to k + c_V$ возникает вследствие регуляризации H_v при переходе от оператора второго порядка в A-представлении (6) к оператору первого порядка в (μ, ξ)-представлении (8), которая может рассматриваться как некоторое нормальное упорядочение.

Мы благодарны А.С.Лосеву за полезные обсуждения.

После того, как работа была послана в печать, мы получили препринт H.Verlinde, PUPT-89/1140, в котором также рассматривались уравнения типа (8b), полученные из конформных тождеств Уорда, правда описывающие лишь киральные диффеоморфизмы.

Литература

1. *Witten E.* Comm. Math. Phys., 1989, **121**, 351.
2. *Moore G., Seiberg N.* Phys. Lett. B, 1989, **220**, 422.
3. *Knizhnik V.G., Zamolodchikov A.B.* Nucl. Phys. B, 1984, **241**, 33.
4. *Bos M., Nair V.* Phys. Lett. B, 1989, **223**, 61.
5. *Elitzur S. et al.* Preprint IASSNS-HEP-89/20.
6. *Labastida J.M.F., Ramallo A.V.* Phys. Lett. B, 1989, **228**, 214.
7. *Dunne G.V. et al.* Ann. Phys., 1989, **194**, 197.
8. *Kogan Ya.I.* Preprint ITEP 163-89.
9. *Fock V.V., Kogan Ya.I.* Preprint ITEP, to be published.

Институт теоретической и экспериментальной физики
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
24 января 1990 г.