Письма в ЖЭТФ, том 51, вып. 4, стр. 188–190 *25 февраля 1990 г.*

КАНОНИЧЕСКОЕ КВАНТОВАНИЕ РЕЛЯТИВИСТСКОЙ ЧАСТИЦЫ

Д.М.Гитман, И.В.Тютин

Предлагается интерпретация, согласно которой репараметризационно-инвариантное действие релятивистской частицы, уже на классическом уровне, описывает одновременно как частицу, так и античастицу. Указана каноническая калибровка, в которой такое описание реализуется естественным образом. Проводится каноническое квантование спиновой частицы в такой калибровке.

Теория релятивистской частицы привлекает в настоящее время внимание в связи с проблемой квантования струн [1]. Последовательно проведенной процедуры канонического квантования для этой теории пока не предъявлено [2–5]. В этой работе мы дадим новую интерпретацию соответствующей классической теории, которая позволяет провести последовательное каноническое квантование.

Рассмотрим предварительно репараметризационно-инвариантное действие скалярной частицы

$$S = \int L d\tau, \quad L = -m\sqrt{\dot{x}^2}, \quad \dot{x}^\mu = dx^\mu/d\tau, \quad \eta_{\mu\nu} = (1, -1, \ldots). \tag{1}$$

Соотношения $\pi_\mu = \partial L/\partial\dot{x}^\mu$ позволяют здесь выразить три скорости $\dot{x}^i$, а также знак скорости $\dot{x}_0$ через импульсы и $|\dot{x}_0|$: $\dot{x}^i = |\dot{x}_0|\pi_i(\pi_k^2 + m^2)^{-1/2}$, $\operatorname{sign}\dot{x}_0 = \zeta = -\operatorname{sign}\pi_0$.
Кроме того, из этих соотношений следует связь $\pi^2 = m^2$, которая здесь является единственной связью (первого рода). Построенный согласно канонической процедуре [6,7] гамильтониан $H^{(1)}$, определяющий эволюцию, имеет вид $H^{(1)} = \lambda[\sqrt{\pi_k^2 + m^2} - |\pi_0|]$, $\lambda = |\dot{x}_0| > 0$. Теория является калибровочной. Наложение калибровки призвано зафиксировать имеющийся произвол (произвол λ). Мы выбираем калибровку

$$x^0 = \zeta\tau, \tag{2}$$

которая дает $\lambda = 1$. Переменная $\zeta = -\operatorname{sign}\pi_0$ связями и калибровочным условием не фиксируется. Будем интерпретировать траектории с $\zeta = 1$ как траектории частицы, а с $\zeta = -1$ как траектории античастицы. Включение внешнего поля подтверждает эту интерпретацию, поскольку траектории с заданным ζ отвечают частице с зарядом ζe. Если электромагнитного поля нет, то возможны две точки зрения. Первая заключается в том, чтобы просто отождествить эти оба класса, или отказаться от одного из них, наложив еще одно дополнительное условие, например $\zeta = 1$, что эквивалентно выбору вместо (2) калибровки $x^0 = \tau$, что обычно и делается. С точки зрения лагранжева формализма это означает, что в группу калибровочных преобразований действия (1) кроме преобразований $x^\mu(\tau) \to x^\mu(f(\tau))$, $\dot{f} > 0$, включаются также преобразования $x^\mu(\tau) \to x^\mu(-\tau)$. В этом случае калибровка (2) не разрушает симметрию, связанную с изменением знака τ. Условие $x^0 = \tau$ эту симметрию разрушает. Можно говорить, что действие (1) с такой расширенной группой симметрии описывает только одну нейтральную частицу. Другая точка зрения заключается в том, что калибровочная группа включает только преобразования $x^\mu(\tau) \to x^\mu(f(\tau))$, $\dot{f} > 0$. В этом случае траектории с различными ζ следует считать различными. Действие (1) с такой калибровочной группой описывает как частицу, так и античастицу. При наличии внешнего поля преобразование $x^\mu(\tau) \to x^\mu(-\tau)$ не является преобразованием симметрии действия. Это означает, что при сохранении калибровочной группы, включающей такое преобразование, невозможно ввести минимальное электромагнитное взаимодействие, что согласуется с вышеприведенной интерпретацией описания нейтральной частицы. Таким образом, уже на классическом уровне выясняется, что в действии (1) фактически заложена возможность одновременного описания как частицы, так и античастицы. Предлагаемая калибровка (2) фактически позволяет реализовать эту возможность.

Квантование проведем сразу для частицы со спином, каноническим образом, в калибровке (2). Лагранжиан частицы со спином имеет вид [2]:

$$L = -\frac{\dot{x}^2}{2e} - \frac{e}{2}m^2 - i(\psi\dot{\psi} - \psi_5\dot{\psi}_5) + i\chi\left(\frac{\dot{x}\psi}{e} + m\psi_5\right),$$

где x^μ, e — четные, а ψ^μ, χ, ψ_5 — нечетные переменные, $\mu = 0, 1, \ldots D-1$. В гамильтоновом формализме имеются связи $P_e = \Pi_\mu + i\psi_\mu = P_\chi = P_5 - i\psi_5 = \sqrt{\pi_k^2 + m^2} - |\pi_0| = \pi\psi - m\psi_5 = 0$, (3) где π_μ, P_e, Π_μ, P_χ, P_5 — импульсы, сопряженные переменным x^μ, e, ψ^μ, χ, ψ_5 соответственно. Среди связей (3) можно выделить четыре независимых связи первого рода, поэтому переходя к канонической калибровке, наложим четыре дополнительных условия $x^0 - \zeta\tau = \chi = P_5 = e - |\pi_0|^{-1} = 0$, где $\zeta = -\operatorname{sign}\pi_0$. Вводя вместо x^0 переменную $x^{0\prime} = x^0 - \zeta\tau$, мы переходим каноническим образом к связям, не зависящим от времени, что позволяет непосредственно воспользоваться методом квантования "по Дираку" теорий со связями второго рода. После проведенного канонического преобразования гамильтониан на поверхности связей имеет вид $H = \sqrt{\pi_k^2 + m^2}$. Исключая из расмотрения переменные e, P_e, χ, P_χ, ψ_5, P_5, $x^{0\prime}$, $|\pi_0|$ с помощью связей, мы убеждаемся, что для оставшихся переменных x^k, π_k, ζ, ψ^μ, Π_μ скобка Дирака по всем связям сводится к скобке Дирака по оставшимся связям $\Pi + i\psi = \pi\psi = 0$. Алгебра коммутационных соотношений для операторов соответствующей квантовой механики определяется этой скобкой Дирака. Реализацию такой алгебры построим для $D = 4$ в гильбертовом пространстве четырехкомпонентных столбцов f. Она имеет вид

$$\hat{\zeta} = \gamma^0, \quad \hat{\pi}_k = \hat{p}_k I, \quad \hat{x}^k = x^k I + \frac{\epsilon^{kil}\Sigma^i\hat{p}^l}{2m(\hat{\omega} + m)},$$

$$\hat{\psi}^0 = \frac{1}{2m}\vec{\Sigma}\hat{\vec{p}}, \quad \hat{\psi}^k = \gamma^0\left(\frac{1}{2}\Sigma^k + \frac{\hat{p}^k\vec{\Sigma}\hat{\vec{p}}}{2m(\hat{\omega} + m)}\right),$$

где $\hat{p}^k = -i\partial_k$, $\hat{\omega} = \sqrt{\hat{p}_k^2 + m^2}$, а I — единичная 4×4 матрица. Эволюция во времени векторов состояний определяется найденным гамильтонианом согласно уравнению Шредингера, которое будучи записанным через "физическое" время $x^0 = \zeta\tau$, где ζ собственные значения оператора $\hat{\zeta}$ имеет вид

$$i\partial f/\partial x^0 = \gamma^0\hat{\omega}f. \tag{4}$$

Уравнение (4) есть уравнение Дирака в представлении Фолди—Вотхойзена [8]. Сделав унитарное преобразование $f = U\Psi$, где $U = (\hat{\omega} + m + \gamma\hat{p})/(2\hat{\omega}(\hat{\omega} + m))^{1/2}$, мы получаем для Ψ уравнение Дирака в стандартном представлении $(\gamma^\mu\hat{p}_\mu - m)\Psi = 0$, $\hat{p}_\mu = i\partial_\mu$. Применяя это преобразование к операторам $\hat{x}^k$ и $\hat{\psi}^\mu$ получим

$$U^+\hat{x}^k U = \hat{X}^k = x^k I + \frac{i}{2m}\left(\gamma^k - \hat{p}^k\frac{\vec{\gamma}\hat{\vec{p}}}{\hat{\omega}^2}\right),$$

$$U^+\hat{\psi}^\mu U = \hat{\Psi}^\mu = \frac{i}{2m}\gamma^5\sigma^{\mu\nu}\hat{p}_\nu, \quad \hat{p}_0 = \vec{\alpha}\hat{\vec{p}} + \beta m.$$

Оператор $\hat{\Psi}^{\mu}$ на решениях уравнения Дирака пропорционален вектору спина Паули–Любаньского, а $\hat{x}^k$ и $\hat{X}^k$ являются операторами среднего положения, полученными в свое время Прайсом [9] из соображений ковариантности средних значений.

Литература

1. *Siegel W.* Introduction to String Field Theory. Singapore: World Scientific, 1988.
2. *Berezin F.A., Marinov M.S.* JETP Lett., 1975, 21, 320; Ann. Phys., 1977, **104**, 336.
3. *Casalbuoni R.* Nuovo Cim., 1976, 33A, 115; *Barducci A. et al.* Nuovo Cim., 1976, 35A, 377.
4. *Brink L. et al.* Phys. Lett. B, 1976, 64, 435; *Brink L. et al.* Nucl. Phys. B, 1977, 118, 76.
5. *Henneaux M., Teitelboim C.* Ann. Phys., 1982, **143**, 127.
6. *Dirac P.A.M.* Lectures on Quantum Mechanics N.Y.: Yeshiva University, 1964.
7. *Гитман Д.М., Тютин И.В.* Каноническое квантование полей со связями. М.: Наука, 1986.
8. *Foldy L.L., Wouthuysen S.A.* Phys. Rev., 1950, 78, 29.
9. *Pryce M.N.L.* Proc. Roy. Soc. A, 1949, 195, 62.

Московский институт радиотехники
электроники и автоматики

Поступила в редакцию
31 января 1990 г.