

## Динамика полей встречных световых импульсов из малого числа колебаний в нелинейных диэлектрических средах

Е. М. Буяновская<sup>1)</sup>, С. А. Козлов

Санкт-Петербургский государственный университет информационных технологий, механики и оптики  
197101 Санкт-Петербург, Россия

Поступила в редакцию 23 апреля 2007 г.

После переработки 16 июля 2007 г.

Выведены уравнения эволюции полей встречных световых импульсов из малого числа колебаний при их взаимодействии в диэлектрических средах с нерезонансной дисперсией и безынерционной электронной нелинейностью. Проиллюстрированы изменения структуры поля и спектра низкоинтенсивного импульса при его столкновении с высокоинтенсивным встречным импульсом. Показано, что при таком столкновении может генерироваться излучение на кратных частотах с длительностью меньшей, чем у исходных импульсов.

PACS: 42.65.Bs, 42.65.Ky

Оптика импульсов из малого числа колебаний светового поля интересна как с фундаментальной, так и с практической точек зрения. Для таких импульсов теряет свое физическое содержание понятие огибающей, поэтому при теоретическом изучении особенностей их распространения в различных оптических средах обычно анализируют динамику непосредственно поля излучения [1–3]. Это поле можно рассматривать весьма сильным, поскольку распространение импульсов из малого числа колебаний без разрушения вещества (по крайней мере, за длительность импульса) оказалось возможным при гораздо больших интенсивностях, чем для более длительного излучения [4]. К настоящему времени изучены многие явления нелинейной оптики таких предельно коротких (по числу колебаний) импульсов: их временное и спектральное уширение и сжатие, самофокусировка, нелинейное отражение, взаимодействие при попутном распространении [5–12]. В данной работе теоретически рассмотрено взаимодействие в нелинейной среде встречных импульсов из малого числа колебаний.

Эволюция поля светового импульса из малого числа колебаний, спектр которых хотя и широк, но лежит в диапазоне прозрачности нелинейной диэлектрической среды, может быть описана уравнением [1, 13]

$$\frac{\partial^2 E}{\partial z^2} - \frac{N_0^2}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} + \frac{2N_0}{c} a \frac{\partial^4 E}{\partial t^4} - \frac{2N_0}{c} b E - g \frac{\partial^2 E^3}{\partial t^2} = 0, \quad (1)$$

где  $E$  – напряженность электрического поля излучения,  $z$  – направление его распространения,  $t$  – время,  $N_0$ ,  $a$ ,  $b$  – параметры, характеризующие нерезонансную зависимость показателя преломления среды

$$n^2 = N_0^2 + 2cN_0 a \omega^2 - 2cN_0 \frac{b}{\omega^2} \quad (2)$$

от частоты  $\omega$ ,  $g = 4\pi\chi/c^2$  описывает нелинейность ее поляризационного отклика  $P_{nl} = \chi E^3$ ,  $\chi$  – нелинейная восприимчивость вещества,  $c$  – скорость света в вакууме.

Уравнения динамики поля встречных волн будем искать в виде

$$\begin{aligned} & \frac{\partial E_+}{\partial z} + \frac{N_0}{c} \frac{\partial E_+}{\partial t} - a \frac{\partial^3 E_+}{\partial t^3} + \\ & + b \int_{-\infty}^{\infty} E_+ dt' + F_+(E_+, E_-) = 0, \\ & \frac{\partial E_-}{\partial z} - \frac{N_0}{c} \frac{\partial E_-}{\partial t} + a \frac{\partial^3 E_-}{\partial t^3} - \\ & - b \int_{-\infty}^{\infty} E_- dt' - F_-(E_-, E_+) = 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Эти уравнения в линеаризованном виде следуют из линеаризованного уравнения (1) [1, 13] и описывают эволюцию поля  $E_+$  волны, распространяющейся в положительном направлении оси  $z$ , и поля  $E_-$  волны, распространяющейся ей навстречу, в среде с показателем преломления

$$\begin{aligned} n(\omega) &= N_0 + \Delta n_I(\omega), \\ \Delta n_I(\omega) &= c a \omega^2 - c \frac{b}{\omega^2}. \end{aligned} \quad (4)$$

<sup>1)</sup>e-mail: bu.eliz.m@mail.ru

Дисперсионное соотношение (4) вытекает из (2) в характерном для диэлектриков нерезонансном приближении [1, 10]

$$N_0 \gg \Delta n_l. \quad (5)$$

Неизвестные функционалы  $F_+(E_+, E_-)$  и  $F_-(E_-, E_+)$ , которые мы определим ниже, характеризуют в (3) взаимодействие встречных волн в нелинейной среде.

Продифференцировав уравнения (3) по  $z$ , выражая в получаемых слагаемых  $\partial^2 E_+ / \partial t \partial z$  и  $\partial^2 E_- / \partial t \partial z$  производные  $\partial E_+ / \partial z$  и  $\partial E_- / \partial z$  из (3), учитывая (5) и пренебрегая полагаемыми малыми произведениями дисперсионных и нелинейных слагаемых, получаем:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 E_+}{\partial z^2} - \frac{N_0^2}{c^2} \frac{\partial^2 E_+}{\partial t^2} + \frac{2N_0}{c} a \frac{\partial^4 E_+}{\partial t^4} - \\ & - \frac{2N_0}{c} b E_+ - \frac{N_0}{c} \frac{\partial F_+}{\partial t} + \frac{\partial F_+}{\partial z} = 0, \\ & \frac{\partial^2 E_-}{\partial z^2} - \frac{N_0^2}{c^2} \frac{\partial^2 E_-}{\partial t^2} + \frac{2N_0}{c} a \frac{\partial^4 E_-}{\partial t^4} - \\ & - \frac{2N_0}{c} b E_- - \frac{N_0}{c} \frac{\partial F_-}{\partial t} - \frac{\partial F_-}{\partial z} = 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Складывая уравнения системы (6) и требуя, чтобы результирующее уравнение для суммарного поля  $E = E_+ + E_-$  приняло исходный вид (1), для функций  $F_+$  и  $F_-$ , которые мы ищем в виде

$$\begin{aligned} F_+ &= a_1 E_+^2 \frac{\partial E_+}{\partial t} + a_2 E_+^2 \frac{\partial E_-}{\partial t} + a_3 E_+ E_- \frac{\partial E_+}{\partial t} + \\ & + a_4 E_+ E_- \frac{\partial E_-}{\partial t} + a_5 E_-^2 \frac{\partial E_+}{\partial t} + a_6 E_-^2 \frac{\partial E_-}{\partial t}, \\ F_- &= b_1 E_-^2 \frac{\partial E_-}{\partial t} + b_2 E_-^2 \frac{\partial E_+}{\partial t} + b_3 E_- E_+ \frac{\partial E_-}{\partial t} + \\ & + b_4 E_- E_+ \frac{\partial E_+}{\partial t} + b_5 E_+^2 \frac{\partial E_-}{\partial t} + b_6 E_+^2 \frac{\partial E_+}{\partial t}, \end{aligned} \quad (7)$$

получаем  $a_1 = \frac{1}{2} a_3 = a_5 = b_1 = \frac{1}{2} b_3 = b_5 = 3cg/2N_0$ ,  $2a_2 + b_4 = 2b_2 + a_4 = 6cg/N_0$ , где  $a_2 = b_2$ ,  $a_4 = b_4$  (равенства коэффициентов  $a_i = b_i$  при  $i = 1 \dots 6$  следуют из симметрии выражений (7)). Соотношения (7) приводят (6) к (1) при любых  $a_6 = b_6$ , поскольку в процессе упомянутой выше вычислительной процедуры они исключаются. Отличие этих коэффициентов от нуля ведет к утверждению о том, что прямая (обратная) волна в отсутствие обратной (прямой) всегда ее

порождает, в то время как для, например, квазимонохроматического излучения известно, что в однородных средах с безынерционной кубичной нелинейностью это не так [14, 15]. Поэтому ниже будем полагать  $a_6 = b_6 = 0$ .

Таким образом, укороченные уравнения, описывающие динамику поля встречных импульсов, решения которых являются и решениями полного полевого уравнения (1), могут быть записаны в виде

$$\begin{aligned} & \frac{\partial E_+}{\partial z} + \frac{N_0}{c} \frac{\partial E_+}{\partial t} - a \frac{\partial^3 E_+}{\partial t^3} + b \int_{-\infty}^t E_+ dt' + \\ & + \frac{3cg}{2N_0} [E_+^2 \frac{\partial E_+}{\partial t} + m E_+^2 \frac{\partial E_-}{\partial t} + 2E_+ E_- \frac{\partial E_+}{\partial t} + \\ & + 2(2-m) E_+ E_- \frac{\partial E_-}{\partial t} + E_-^2 \frac{\partial E_+}{\partial t}] = 0, \\ & \frac{\partial E_-}{\partial z} - \frac{N_0}{c} \frac{\partial E_-}{\partial t} + a \frac{\partial^3 E_-}{\partial t^3} - b \int_{-\infty}^t E_- dt' - \\ & - \frac{3cg}{2N_0} [E_-^2 \frac{\partial E_-}{\partial t} + m E_-^2 \frac{\partial E_+}{\partial t} + 2E_- E_+ \frac{\partial E_-}{\partial t} + \\ & + 2(2-m) E_- E_+ \frac{\partial E_+}{\partial t} + E_+^2 \frac{\partial E_-}{\partial t}] = 0, \end{aligned} \quad (8)$$

где  $m$  – произвольное число. Отметим, что при любом характере эволюции однонаправленной волны в рассматриваемой среде из (8) следует отсутствие ее самоотражения.

Для оптических импульсов спектральная плотность на нулевой частоте

$$G(0) = \int_{-\infty}^{\infty} E e^{i0t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} E dt = 0. \quad (9)$$

Анализ уравнений системы (8) показывает, что соотношение (9) для каждой из встречных волн сохраняется, то есть выполняются уравнения

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dz} \int_{-\infty}^{\infty} E_+ dt = 0, \\ & \frac{d}{dz} \int_{-\infty}^{\infty} E_- dt = 0 \end{aligned} \quad (10)$$

при значении  $m = 1$ . Таким образом, для импульсов, которые в результате взаимодействия остаются

оптическими, уравнения (8) примут вид законов сохранения

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_+}{\partial z} + \frac{N_0}{c} \frac{\partial E_+}{\partial t} - a \frac{\partial^3 E_+}{\partial t^3} + b \int_{-\infty}^t E_+ dt' + \\ + \frac{cg}{2N_0} \frac{\partial}{\partial t} (E_+^3 + 3E_+^2 E_- + 3E_+ E_-^2) = 0, \\ \frac{\partial E_-}{\partial z} - \frac{N_0}{c} \frac{\partial E_-}{\partial t} + a \frac{\partial^3 E_-}{\partial t^3} - b \int_{-\infty}^t E_- dt' - \\ - \frac{cg}{2N_0} \frac{\partial}{\partial t} (E_-^3 + 3E_-^2 E_+ + 3E_- E_+^2) = 0, \end{aligned} \quad (11)$$

переходящих при интегрировании по времени в (10).

Важно отметить, что подстановка

$$\begin{aligned} E_+(z, t) = \frac{1}{2} \varepsilon_+(z, t) e^{i(\omega_0 t - k_0 z)} + \text{к.с.}, \\ E_-(z, t) = \frac{1}{2} \varepsilon_-(z, t) e^{i(\omega_0 t + k_0 z)} + \text{к.с.}, \end{aligned} \quad (12)$$

где  $\varepsilon_+$  и  $\varepsilon_-$  – медленно меняющиеся огибающие встречных квазимонохроматических импульсов с несущей частотой  $\omega_0$ ,  $k_0 = N_0 \omega_0 / c$  – волновое число, при характерных для приближения медленно меняющихся огибающих упрощениях, приводит уравнения (11) к хорошо известным уравнениям вида [16]

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varepsilon_+}{\partial z} + \frac{1}{v_g} \frac{\partial \varepsilon_+}{\partial t} + i \frac{\beta_2}{2} \frac{\partial^2 \varepsilon_+}{\partial t^2} = i \gamma (|\varepsilon_+|^2 + 2|\varepsilon_-|^2) \varepsilon_+ \\ + \frac{\partial \varepsilon_-}{\partial z} - \frac{1}{v_g} \frac{\partial \varepsilon_-}{\partial t} - i \frac{\beta_2}{2} \frac{\partial^2 \varepsilon_-}{\partial t^2} = -i \gamma (|\varepsilon_-|^2 + 2|\varepsilon_+|^2) \varepsilon_-, \end{aligned} \quad (13)$$

где

$$\begin{aligned} \frac{1}{v_g} = \left( \frac{\partial k}{\partial \omega} \right)_{\omega_0}, \quad \beta_2 = \left( \frac{\partial^2 k}{\partial \omega^2} \right)_{\omega_0}, \\ k(\omega) = \frac{N_0}{c} \omega + a \omega^3 - \frac{b}{\omega}, \quad \gamma = \frac{3g\omega_0}{8N_0 c}. \end{aligned}$$

То есть полученная в данной работе система нелинейных уравнений динамики поля встречных волн (11) включает, как частный случай, известную систему уравнений для огибающих взаимодействующих квазимонохроматических импульсов (13).

Выведенные для оптического излучения уравнения (11) применим для анализа частного случая взаимодействия полей низко- ( $E_+$ ) и высокоинтенсивного

( $E_-$ ) импульсов, для которых уравнения (11) упрощаются и принимают вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_+}{\partial z} + \frac{N_0}{c} \frac{\partial E_+}{\partial t} - a \frac{\partial^3 E_+}{\partial t^3} + \\ + b \int_{-\infty}^t E_+ dt' + \frac{3cg}{2N_0} \frac{\partial}{\partial t} (E_-^2 E_+) = 0, \\ \frac{\partial E_-}{\partial z} - \frac{N_0}{c} \frac{\partial E_-}{\partial t} + a \frac{\partial^3 E_-}{\partial t^3} - \\ - b \int_{-\infty}^t E_- dt' - \frac{3cg}{2N_0} E_-^2 \frac{\partial E_-}{\partial t} = 0. \end{aligned} \quad (14)$$

Как видно из системы (14), мы предполагаем, что низкоинтенсивная волна не влияет на распространение высокоинтенсивной, а для нее самой нелинейный характер распространения определяется только сильным полем встречной волны.

Решения второго уравнения системы (14), описывающие различные режимы самовоздействия излучения с широким спектром, включая импульсы из малого числа колебаний светового поля, изучались во многих работах (смотри, например, их обзоры в [6, 10, 17]). Ниже, при определении решений первого уравнения системы (14) для низкоинтенсивной волны динамику поля высокоинтенсивной волны  $E_-(t, z)$  будем полагать известной.

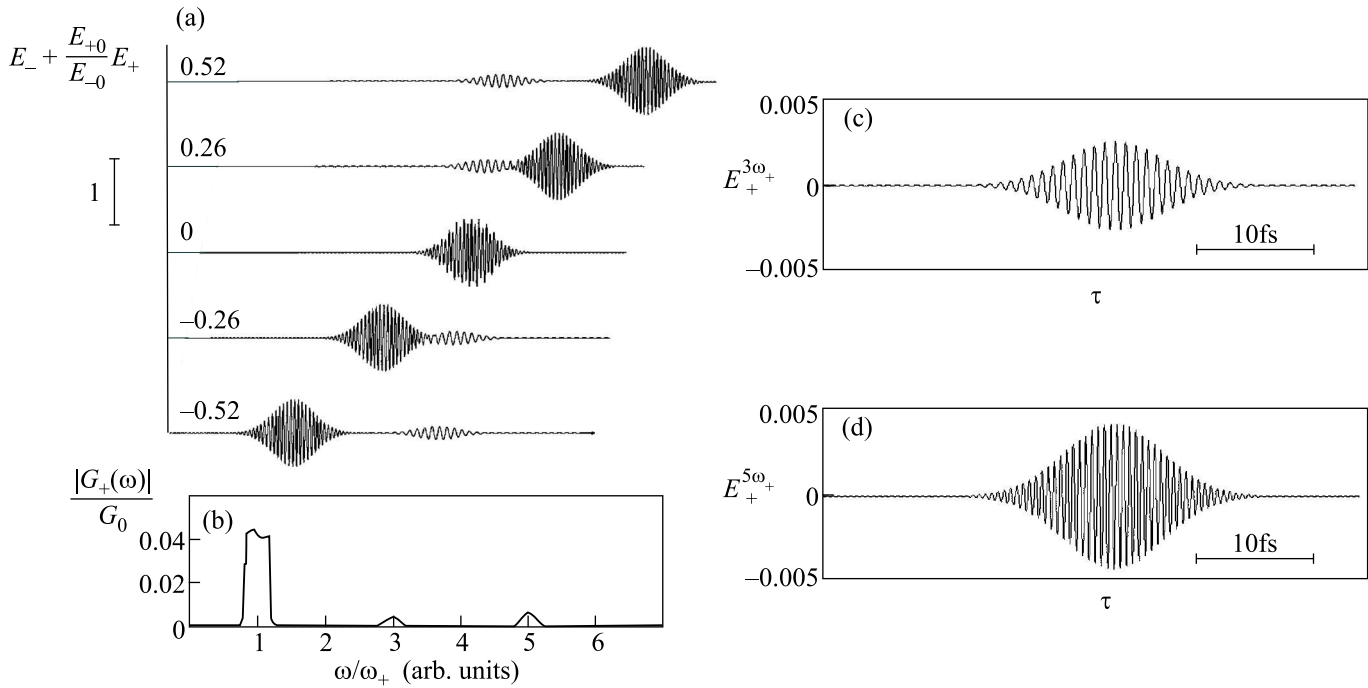
Для анализа решений первого уравнения системы (14) проведем его нормировку. Введем новые переменные  $\tilde{E}_+ = E_+ / E_{+0}$ ,  $\tilde{E}_- = E_- / E_{-0}$ ,  $\tilde{z} = a \omega_+^3 z$ ,  $\tilde{t} = \omega_+ t$ , где  $E_{+0}$  и  $E_{-0}$  – максимальные значения напряженностей полей прямой и встречных волн до их взаимодействия,  $\omega_+$  – исходная центральная частота низкоинтенсивной волны  $E_+(z, t)$ . В этих переменных первое уравнение системы (14) принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{E}_+}{\partial \tilde{z}} + \frac{1}{V} \frac{\partial \tilde{E}_+}{\partial \tilde{t}} - \frac{\partial^3 \tilde{E}_+}{\partial \tilde{t}^3} + \\ + B \int_{-\infty}^{\tilde{t}} \tilde{E}_+ d\tilde{t}' + G \frac{\partial}{\partial \tilde{t}} (\tilde{E}_-^2 \tilde{E}_+) = 0, \end{aligned} \quad (15)$$

где

$$\frac{1}{V} = \frac{N_0}{\Delta n_d}, \quad B = 3 \left( \frac{\omega_{cr}}{\omega_0} \right)^4, \quad G = 4 \frac{\Delta n_{nl}}{\Delta n_d};$$

$\Delta n_d = c a \omega_0^3$  характеризует дисперсию показателя преломления оптической среды;  $\Delta n_{nl} = (3c^2 g / 8N_0) E_{-0}^2$  имеет смысл нелинейной добавки к ее показателю преломления  $\Delta n_{nl} = n_2 I$  (здесь  $n_2$  – коэффициент нелинейного показателя преломления, а  $I$  – интенсивность излучения) в поле монохроматической волны с



Столкновение низко- и высокоинтенсивного импульсов в кварцевом стекле: (а) общая картина; (б) спектр низкоинтенсивного импульса  $G_+$  после взаимодействия, нормированный на его максимальное значение до взаимодействия  $G_0$ ; (с) и (d) – импульсы, сгенерированные в результате взаимодействия на кратных частотах

амплитудой  $E_{-0}$ ;  $\omega_{cr} = (b/3a)^{-4}$  – частота излучения, при которой групповая дисперсия в среде равняется нулю [1].

Отметим, что для введенных параметров задачи выполняются неравенства:

$$\Delta n_d \ll N_0, \quad \Delta n_{nl} \ll N_0, \quad (16)$$

первое из которых прямо следует из нерезонансного приближения (5), а второе заложено в исходном уравнении (1), в котором нелинейность поляризованности изотропной среды рассматривается в наинизшем кубичном по полю приближении.

В качестве примера вещества, в котором взаимодействуют два встречных световых импульса, рассмотрим кварцевое стекло с характеристиками  $N_0 = 1.45$ ,  $a = 2.74 \cdot 10^{-44} \text{ c}^2/\text{см}$ ,  $b = 3.94 \text{ 1/с}\cdot\text{см}$ ,  $n_2 = 2.9 \cdot 10^{-16} \text{ см}^2/\text{Вт}$  [10, 11]. При центральной длине волны низкоинтенсивного излучения  $\lambda_+ = 780 \text{ нм}$  для него имеем  $\Delta n_d = 4.7 \cdot 10^{-3}$ . Значение  $\Delta n_{nl} = 0.1$ , еще вполне удовлетворяющее неравенству (16), реализуется при интенсивности  $I = 3 \cdot 10^{14} \text{ Вт/см}^2$ . Впрочем, при  $I > 5 \cdot 10^{13} \text{ Вт/см}^2$  даже для импульсов из малого числа колебаний возникает необходимость кроме безынерционной кубичной нелинейности учитывать и накапливающуюся плазменную нелинейность диэлектрической среды [4, 18].

Ниже ограничимся анализом решений нормированного уравнения (15) для случая, когда коэффициент при нелинейном слагаемом  $G$  существенно больше коэффициентов при дисперсионных слагаемых, то есть, например, для излучения со спектром в области нормальной групповой дисперсии – при  $G$ , существенно большем единицы. Для кварцевого стекла в поле излучения с центральной длиной волны  $\lambda_+ = 780 \text{ нм}$  и интенсивностью  $I = 1 \dots 5 \cdot 10^{13} \text{ Вт/см}^2$  выполняется оценка  $G = 2.5 \dots 12.5$ .

Когда дисперсионными эффектами по сравнению с нелинейными в процессе взаимодействия встречающихся волн можно пренебречь, уравнение (15) упрощается до вида

$$\frac{\partial E_+}{\partial z} + \frac{1}{V} \frac{\partial E_+}{\partial t} + G \frac{\partial}{\partial t} (E_-^2 E_+) = 0, \quad (17)$$

в котором знак “ $\sim$ ” опущен. Переходя в сопровождающую систему координат  $\tau = t - (1/V)z$ ,  $z' = z$  и применяя метод последовательных приближений Пикара [19], в первой итерации несложно получить приближенное решение (17) в виде

$$E_+(z', \tau) = E_i(\tau) + G \int_{z_0}^{z'} \frac{\partial}{\partial \tau} [E_-^2(z'', \tau) E_i(\tau)] dz'', \quad (18)$$

где  $E_l(\tau)$  – решение линеаризованного уравнения (17) вида светового импульса, не изменяющегося по форме при распространении в бездисперсионной среде,  $E_-(z', \tau)$  – заданное сильное поле встречного импульса,  $z_0$  – координата диэлектрической среды, начиная с которой световые импульсы, распространяющиеся навстречу друг другу, во времени начинают пересекаться (см. рисунок (а)).

На рисунке проиллюстрировано столкновение низкоинтенсивного импульса, имеющего до взаимодействия нормированный вид

$$E_+(\tau) = \exp\left(-\frac{\tau^2}{\tau_+^2}\right) \sin(\tau), \quad (19)$$

и встречного высокоинтенсивного

$$E_-(\tau, z) = \exp\left(-\frac{\left(\tau + \frac{2}{V}z'\right)^2}{\tau_-^2}\right) \times \sin \frac{\omega_-}{\omega_+} \left(\tau + \frac{2}{V}z'\right), \quad (20)$$

где  $\omega_-$  – центральная частота высокоинтенсивной волны,  $\tau_+ = \omega_+ \tau_{+0}$ ,  $\tau_- = \omega_+ \tau_{-0}$ ,  $\tau_{+0}$ ,  $\tau_{-0}$  – исходные длительности импульсов, в кварцевом стекле, при  $G = 2.5(I_{-0} = 1 \cdot 10^{13} \text{ Вт/см}^2)$ ,  $E_{+0}/E_{-0} = 0.2$ ,  $\tau_{+0} = \tau_{-0} = 10 \text{ фс}$ ,  $\lambda_+ = 780 \text{ нм}$ ,  $\lambda_- = 390 \text{ нм}$ .

На рисунке (b) представлен спектр низкоинтенсивного излучения после взаимодействия с высокоинтенсивным в нелинейной среде. Из рисунка видно, что в этом спектре в результате взаимодействия генерируются кратные  $2\omega_- - \omega_+ = 3\omega_+$  и  $2\omega_- + \omega_+ = 5\omega_+$  частоты.

На рисунках (c) и (d) представлена временная эволюция электрического поля излучения на генерируемых частотах. Как видно из рисунков, длительность импульсов на утроенных ( $E_+^{3\omega_+}$ ) и упятеренных ( $E_+^{5\omega_+}$ ) частотах составляет 5.7 фс и 6.9 фс, соответственно, длительность импульсов, как и в (19), (20), определялась по их полуширине на уровне  $e^{-1}$  от максимального значения амплитуды огибающей поля. Отношение их максимальных амплитуд к максимальной амплитуде поля исходного излучения составляет  $1.3 \cdot 10^{-2}$  и  $2 \cdot 10^{-2}$ . Отметим, что при выборе слоя среды достаточно тонким (с толщиной порядка области взаимодействия) поглощением в кварцевом стекле излучения упятеренных частот в используемой выше первой итерации можно пренебречь, а при необходимости можно учесть его, как и изменение в тонком слое формы высокоинтенсивного импульса, в следующей итерации метода Пикара.

Таким образом, в настоящей работе выведены уравнения эволюции поля встречных световых импульсов из малого числа колебаний в диэлектрических нелинейных средах. Показано, что при столкновении импульсов с разным спектральным составом может генерироваться излучение на кратных частотах с длительностью меньшей, чем у исходных импульсов.

Работа поддержана грантами программы “Развитие научного потенциала высшей школы” # РПН.2.1.1.6877 и Российского фонда фундаментальных исследований # 05-02-16556а. Авторы благодарят профессора Н.Н. Розанова за полезное обсуждение работы.

1. С. А. Козлов, С. В. Сазонов, ЖЭТФ **111**, 404 (1997).
2. A. Nazarkin and G. Korn, Phys. Rev. A **58**, 61 (1998).
3. А. И. Маймистов, Квантовая электроника **30**, 287 (2000).
4. Th. Brabec and F. Krausz, Rev. Mod. Phys. **72**, 545 (2000).
5. Е. В. Казанцева, А. И. Маймистов, Квантовая электроника **30**, 623 (2000).
6. Y. A. Shpolyanskiy, D. L. Belov, M. A. Bakhtin, and S. A. Kozlov, Applied Physics B **77**, 349 (2003).
7. С. В. Сазонов, В. А. Халяпин, Квантовая электроника **34**, 1057 (2004).
8. С. А. Козлов, Ю. А. Шполянский, Н. В. Ястребова, Оптический журнал **71**, 78 (2004).
9. Д. Л. Белов, С. А. Козлов, Ю. А. Шполянский, Известия РАН, серия физ. **69**, 1124 (2005).
10. A. N. Berkovsky, S. A. Kozlov, and Y. A. Shpolyanskiy, Phys. Rev. A **72**, 043821 (2005).
11. М. А. Бахтин, С. А. Козлов, Опт. и спектр. **98**, 470 (2005).
12. А. А. Балакин, А. Г. Литвак, В. А. Миронов и др., ЖЭТФ **131**, 408 (2007).
13. V. G. Bespalov, S. A. Kozlov, Yu. A. Shpolyanskiy, and I. A. Walmsley, Phys. Rev. A **66**, 013811, (2002).
14. H. Kogelnic, Bell. Syst. Techn. J. **48**, 2909 (1969).
15. Ю. А. Ананьев, *Оптические резонаторы и проблема расходимости лазерного излучения*, М.: Наука, 1979.
16. Г. Агравал, *Нелинейная волоконная оптика*, М.: Мир, 1996.
17. С. В. Сазонов, В. А. Халяпин, Опт. и спектр. **95**, 452 (2003).
18. С. А. Штумпф, А. А. Королев, С. А. Козлов, Известия РАН, серия физ. **71**, 158 (2007).
19. Г. Корн, Т. Корн, *Справочник по математике*, М.: Наука, 1997.