

Влияние диффузии на скорость распространения стационарных волн ударной ионизации в полупроводниках

А. С. Кюрегян¹⁾

Всероссийский Электротехнический институт им. В.И.Ленина, 111250 Москва, Россия

Поступила в редакцию 18 апреля 2007 г.

После переработки 20 июня 2007 г.

Предложено обобщение известной теории стационарных плоских волн ударной ионизации в газах (U. Ebert et al., Phys. Rev. E **55**, 1530 (1997)) на биполярный случай, характерный для полупроводников, где среду ионизируют горячие носители заряда обоих знаков. Вследствие этого скорость u биполярных волн (в отличие от монополярных) определяется процессами в лидирующей области фронта при любых отличных от нуля скоростях ударной ионизации вне зависимости от направления распространения. Это свойство позволило получить аналитические формулы для u как функции параметров материала, начального возмущения и напряженности внешнего поля путем анализа краевой задачи, линеаризованной вблизи неустойчивого состояния. В максимально достижимых полях (например, в стримерах) диффузия должна приводить к увеличению u примерно в три раза по сравнению со средней скоростью дрейфа при типичных значениях параметров полупроводников.

PACS: 51.50.+v, 52.35.-g, 72.20.Ht, 85.30.Mn

В большинстве работ, посвященных теоретическому исследованию волн ударной ионизации (ВУИ) в газах и полупроводниках, для описания переноса подвижных носителей заряда используется дрейфовое приближение [1–4], что оправдано, если можно пренебречь флуктуациями скоростей дрейфа. В первом приближении их можно учесть путем сохранения в уравнениях непрерывности членов, описывающих диффузию носителей заряда. Применительно к газам исследование такой задачи было изложено в работах [5, 6], а наиболее полные результаты получены позднее в [7]. Разумеется, “диффузионный” механизм ускорения фронта должен проявлять себя и в полупроводниках. Однако использование результатов работ [5–7] для описания ВУИ в полупроводниках невозможно, поскольку все кинетические коэффициенты электронов и дырок соизмеримы, тогда как в газах и ударная ионизация, и перенос заряда осуществляются только электронами. В настоящей работе мы исследуем влияние диффузии на скорость распространения стационарных плоских ВУИ в характерном для полупроводников биполярном случае.

Для определенности рассмотрим плоскую ВУИ, распространяющуюся в направлении анода вдоль оси x . В системе координат $z = (x - ut)$, движущейся относительно кристаллической решетки со скоростью u , распределения концентраций электронов n , дырок

p и напряженности поля ($-E$) описываются уравнениями непрерывности и Пуассона:

$$\begin{aligned} \frac{\partial n}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\partial(D_e n)}{\partial z} + (u - v_e)n \right] &= \\ = \frac{\partial p}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\partial(D_h p)}{\partial z} + (u + v_h)p \right] &= \\ &= (g_e n + g_h p) - R, \end{aligned} \quad (1)$$

$$\frac{dE}{dz} = \frac{q}{\varepsilon}(n - p), \quad (2)$$

где q – элементарный заряд, ε – диэлектрическая проницаемость полупроводника, $D_{e,h}$, $v_{e,h}$, $g_{e,h}$ и R – усредненные по ансамблю частиц коэффициенты диффузии, дрейфовые скорости, частоты ударной ионизации и скорость нелинейной (например – Оже) рекомбинации, которые мы, как обычно [1–7], полагаем локальными функциями E ; индексы “ e ” и “ h ” относятся к электронам и дыркам. Используя такую форму записи уравнений непрерывности, мы учитываем термоэлектрические токи и пренебрегаем линейной рекомбинацией носителей заряда, поскольку в слаболегированных полупроводниках их время жизни обычно много больше времени распространения ВУИ.

Среда в каждой точке характеризуется тройкой чисел (n, p, E) . Распространение волны переводит неустойчивое состояние $(0, 0, E_0)$ перед фронтом в

¹⁾e-mail: ask@vei.ru

устойчивое состояние $(n_-, n_-, 0)$ за фронтом, так что граничные условия имеют вид [3, 6, 7]

$$\begin{aligned} p(\infty) = n(\infty) = 0, \quad E(\infty) = E_0, \\ p(-\infty) = n(-\infty) = n_-, \quad E(-\infty) = 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Последнее из этих равенств означает, что полупроводник (например, обратно смещенная $p^+ - i - n^+$ -структура с нелегированным i -слоем) включен в достаточно высокоомную внешнюю цепь, чтобы можно было пренебречь полным током и считать постоянной величину E_0 .

Сама постановка вопроса, вынесенная в заголовок статьи, предполагает существование стационарных ВУИ. Однако со времени опубликования пионерской работы [8] до сих пор не удалось найти и строго обосновать необходимые и достаточные условия существования непрерывных стационарных решений систем типа (1)–(3). В то же время, в дрейфовом приближении (то есть при $D_{e,h} = 0$) такие решения существуют и для принятой нами модели волны без тока описываются формулами

$$\begin{aligned} z = \int_E^{E(0)} \frac{\nu}{\eta} dE, \quad n = \frac{\varepsilon}{q} \frac{\eta}{u - v_e}, \quad p = \frac{\varepsilon}{q} \frac{\eta}{u + v_h}, \\ \nu = \frac{(u - v_e)(u + v_h)}{v_e + v_h}, \quad \Omega = \frac{(u - v_e)g_h + (u + v_h)g_e}{v_e + v_h}, \\ \eta = \int_E^{E_0} \Omega dE, \quad 0 < E(0) < E_0, \end{aligned} \quad (4)$$

в чем легко убедиться, используя результаты работы [4]. Физический смысл имеют только положительные концентрации электронов n , поэтому допустимы все значения u , которые при $dv_e/dE > 0$ ограничены неравенством $u > v_e(E_0)$. Диффузия должна размывать фронт и увеличивать его скорость (в том числе и минимальную) при прочих равных условиях, однако не видно никаких причин, по которым она может вообще исключить возможность существования стационарных ВУИ. Это подтверждается также результатами численного моделирования, кратко описанными в конце статьи.

Коль скоро стационарные ВУИ существуют и при наличии диффузии, их асимптотическое поведение перед фронтом должно определяться системой (1), (2), линеаризованной вблизи неустойчивого состояния $(0, 0, E_0)$. Нетривиальные решения вида $\exp(-\lambda z)$ существуют и удовлетворяют граничным условиям (3) при $z \rightarrow \infty$, если $\lambda \neq 0$ являются кор-

нями соответствующего характеристического уравнения

$$\lambda = \frac{g_{e0}}{u - v_{e0} - \lambda D_{e0}} + \frac{g_{h0}}{u + v_{h0} - \lambda D_{h0}} \quad (5)$$

(здесь и далее индекс “0” при кинетических коэффициентах означает их соответствие значению $E = E_0$). Разумеется, при $D_{e,h} = 0$ эта формула дает значение показателя экспоненты, описывающей и асимптотику решения (4). Для того чтобы концентрации носителей заряда везде были положительными, корень λ_m с минимальной реальной частью (которая больше нуля у всех трех корней уравнения (5) при $u > v_{e0}$) должен быть действительным. В зависимости от соотношения между параметрами задачи возможно существование одной ($u \geq u^*$) или двух ($u \geq u^*$ и $u \leq u_* < u^*$) областей значений u , при которых $\text{Im}(\lambda_m) = 0$ (см. рис.1). Границы этих обла-

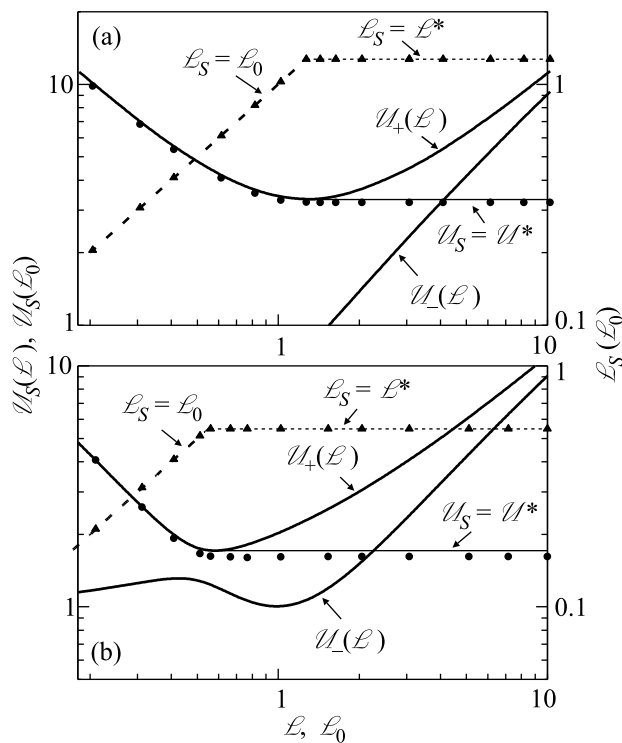


Рис.1. Примеры зависимостей $U_{\pm}(L) = u_{\pm}(\lambda)/v_0$, $U_S(L_0)$ и $L_S(L_0)$, полученные с помощью аналитической теории (кривые) и путем обработки результатов численного моделирования (точки) для значений параметров $D_h = 1.0$ (a) и $D_h = 0.01$ (b) при $D_e = 1.0$ и $v_{e0} = v_{h0} = v_0$, $D_{e0} = D_{h0} = D_0$

тей определяются из условия совпадения двух корней уравнения (5) с минимальными реальными частями. Если его разрешить относительно скорости фронта,

то получится функция $u(\lambda)$, описывающая две ветви “закона дисперсии”:

$$u_{\pm}(\lambda) = \frac{1}{\lambda} [g_{\pm} + v_{\pm}\lambda + D_{\pm}\lambda^2 \pm \sqrt{(g_{\pm} + v_{\pm}\lambda + D_{\pm}\lambda^2)^2 + g_{h0}g_{e0}}], \quad (6)$$

где $g_{\pm} = (g_{e0} \pm g_{h0})/2$, $v_{\pm} = (v_{e0} \pm v_{h0})/2$, $D_{\pm} = (D_{e0} \pm D_{h0})/2$. Характерные примеры зависимостей $u_{\pm}(\lambda) = [u_{\pm}(\lambda) - v_{\pm}]/v_{\pm}$ приведены на рис.1, из которого видно, что граничные значения скоростей равны $u^* = u_+(\lambda^*)$ и $u_* = u_-(\lambda_*)$, а λ^* и λ_* должны удовлетворять условиям минимума $u_+(\lambda)$ и максимума $u_-(\lambda)$ соответственно. Очевидно, скорость u должна увеличиваться с ростом $g_{e,h}$ и уменьшаться с ростом λ_m при прочих равных условиях. Оба эти требования выполняются для верхней ветви закона дисперсии $u_+(\lambda)$ при $\lambda \leq \lambda^*$, но не выполняются для нижней ветви $u_-(\lambda)$. Следовательно, из-за влияния диффузии стационарные ВУИ в полупроводниках могут распространяться только со скоростями $u \geq u^*$. К такому же выводу приводит анализ стабильности фронта, который, согласно [9], устойчив по отношению к одномерным возмущениям только при $u \geq u^*$. Причина этого состоит в том, что u^* является также минимально возможной скоростью распространения малого возмущения, локализованного в области линейности перед фронтом.

Какая именно пара значений u_S и λ_S реализуется в каждом конкретном случае, зависит от характера породившего ВУИ начального возмущения $n, p(x, 0) = n_0(x)$, среди которых возмущения вида $n_0(x) \propto \exp(-\lambda_0 x)$ занимают особое место [6, 9]. Эволюция всех таких возмущений с заданной величиной $\lambda_0 < \lambda^*$ приведет к возникновению одинаковых волн, движущихся с постоянной скоростью $u_S = u_+(\lambda_0)$ и обладающих асимптотикой $n, p \propto \exp(-\lambda_0 z)$. Если же начальное возмущение сильно локализовано (то есть $\lambda_0 \geq \lambda^*$), то со временем сформируется единственно возможная устойчивая ВУИ, движущаяся с постоянной скоростью $u_S = u^* > v_{e0}$ и асимптотикой $n, p \propto z \exp(-\lambda^* z)$ [9].

В общем виде уравнение $\partial u_+ / \partial \lambda|_{\lambda=\lambda^*} = 0$, которое нужно решать для вычисления λ^* и u^* , очень громоздко и содержит четыре независимых безразмерных параметра. Полный анализ свойств его решений занял бы слишком много места, поэтому далее мы будем предполагать, что $D_{e0} = D_{h0} = D_0$. При этом главные особенности задачи сохраняются, но число

параметров уменьшается вдвое, все формулы сильно упрощаются, из (6) следуют выражение

$$U^* = \frac{1}{\mathcal{L}^*} \left[\frac{\mathcal{D}_e + \mathcal{D}_h}{2} + \mathcal{L}^{*2} + \sqrt{\left(\frac{\mathcal{D}_e + \mathcal{D}_h}{2} \right)^2 + (\mathcal{D}_e - \mathcal{D}_h)\mathcal{L}^* + \mathcal{L}^{*2}} \right] \quad (7)$$

для безразмерной скорости $U^* = (u^* - v_-)/v_+$ и уравнение

$$(\mathcal{L}^{*2} - \mathcal{D}_e - \mathcal{D}_h) \left[\left(\frac{\mathcal{D}_e + \mathcal{D}_h}{2} \right)^2 + (\mathcal{D}_e - \mathcal{D}_h)\mathcal{L}^* + \mathcal{L}^{*2} \right] + \mathcal{D}_e \mathcal{D}_h = 0 \quad (8)$$

для $\mathcal{L}^* = \lambda^* D_0 / v_+$, где $\mathcal{D}_{e,h} = g_{e0,h0} D_0 / v_+^2$. Аналитические формулы для \mathcal{L}^* и U^* даже при этом упрощении можно получить лишь в предельных случаях.

При $\mathcal{D}_h \ll \mathcal{D}_e$ (как, например, в Si, где $\alpha_h \ll \alpha_e$) в линейном по \mathcal{D}_h приближении

$$\mathcal{L}^* \approx \sqrt{\mathcal{D}_e} + \frac{\mathcal{D}_e}{2} \frac{4 + \sqrt{\mathcal{D}_e}}{(2 + \sqrt{\mathcal{D}_e})^2}, \quad U^* \approx 1 + 2\sqrt{\mathcal{D}_e} + \frac{\mathcal{D}_h}{2 + \sqrt{\mathcal{D}_e}}. \quad (9)$$

Если $\sqrt{\mathcal{D}_e} \ll \mathcal{D}_h \ll 4$ (этот случай может реализоваться в SiC, где $\alpha_e \ll \alpha_h$), то в линейном по $\sqrt{\mathcal{D}_e}$ приближении

$$\mathcal{L}^* \approx \mathcal{D}_h / 2 + \sqrt{\mathcal{D}_e}, \quad U^* \approx 1 + \mathcal{D}_h / 2 + 2\sqrt{\mathcal{D}_e}. \quad (10)$$

Формулы (9) и (10) непрерывно сшиваются между собой, поэтому (9) должны давать приблизительно правильный результат при любом соотношении между \mathcal{D}_e и \mathcal{D}_h , что и подтверждается результатами численного решения уравнения (8), приведенными на рис.2. Погрешность вычисления диффузионной поправки $(U^* - 1)$ по формулам (9) не превосходит 5% вплоть до значений $\mathcal{D}_h \sim \max(4\mathcal{D}_e, 4)$ при всех \mathcal{D}_e , то есть фактически они применимы во всем реально возможном диапазоне параметров. Они справедливы также в пределе $\mathcal{D}_h = 0$, когда совпадают с результатами [5–7] для анодно-направленного фронта в газах. Однако при $\mathcal{D}_e = 0$ первое слагаемое в уравнении (5) равно нулю, поэтому из него следует решение

$$\mathcal{L}^* = \sqrt{\mathcal{D}_h}, \quad U^* = -1 + 2\sqrt{\mathcal{D}_h}, \quad (11)$$

не совпадающее с (10) в пределе $\mathcal{D}_e \rightarrow 0$.

Если скорость ВУИ определяется процессами далеко перед фронтом и не зависит от его внутренней структуры в той области, где существенна нелинейность, то формулы (6)–(11) дают полное решение

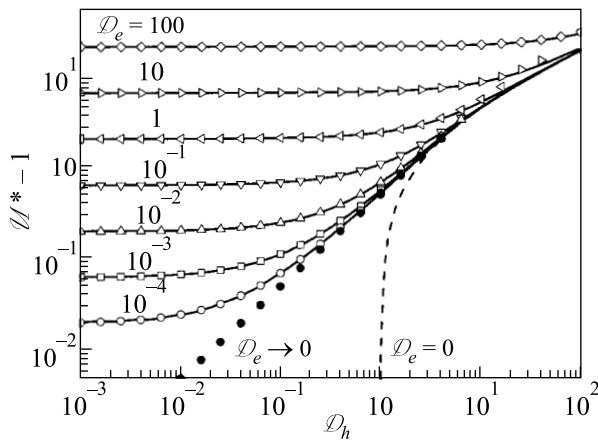


Рис.2. Зависимости нормированной минимальной скорости фронта $U^* = u^*/v_0$ от параметров $\mathcal{D}_{e,h}$ при $v_{e0} = v_{h0} = v_0$ и $D_{e0} = D_{h0} = D_0$. Сплошные кривые – результаты расчетов по формулам (7), (8), точки – расчет по (9), штриховая линия – расчет по (11)

поставленной задачи²⁾. Фронты, обладающие этим свойством, относятся к классу так называемых “вытягиваемых” фронтов (pulled fronts) [9]. Однако существует также возможность того, что зависимость $u_S = u_+(\lambda_0)$ сохраняется только при $\lambda_0 < \lambda_{cr} < \lambda^*$ и $u_S > u^\dagger = u_+(\lambda_{cr})$, а при $\lambda_0 > \lambda_{cr}$ из начального возмущения формируется волна, распространяющаяся со скоростью $u_S = u^\dagger > u^*$ и асимптотикой $\exp(-\lambda^\dagger x)$, где $\lambda^\dagger > \lambda^*$ – второй из корней уравнения $u^\dagger = u_+(\lambda)$. Фронты, распространяющиеся в таком режиме, называются “выталкиваемыми” (pushed fronts) [9], так как их скорость и асимптотика определяются процессами, происходящими во внутренних областях. Поэтому для вычисления величин λ_{cr} , u^\dagger и λ^\dagger линейного анализа перед фронтом недостаточно; они могут быть получены только путем решения (численного или аналитического) полной нелинейной задачи.

Именно этот последний сценарий должен реализовываться в случае $\mathcal{D}_e = 0$ (при перемене индексов “e” и “h” он соответствует катодно-направленному фронту в газах, рассмотренному в [5–7]). Действительно, из (4), (5) следует, что в дрейфовом приближении физически непротиворечивое стационарное решение системы (1), (2) существует только при $u > 0$ и $\lambda < g_{h0}/v_{h0}$, если еще положить $v_e = 0$ (это равенство соответствует предположению о неподвижности ионов в газах). Если же $\lambda_0 > g_{h0}/v_{h0}$, то из началь-

ного возмущения формируется неподвижная ВУИ с разрывом концентрации дырок на фронте [6]. Диффузия “размывает” фронт и может только увеличить его скорость, поэтому при $\mathcal{D}_h \neq 0$ во всяком случае должно быть $u_S > 0$. Между тем линейный анализ “разрешает” (см. (11)) распространение фронта со скоростью $u_S < 0$ (или, что то же самое, $U_S < 1$), если $\mathcal{D}_{h0} < v_{h0}^2/4g_{h0}$ ($\mathcal{D}_h < 1$). Это означает, что существует диапазон значений $\mathcal{D}_h < \mathcal{D}_{cr}$ и $\lambda_0 > \lambda_{cr}$ (вообще говоря, отличный от указанного), при которых линейный анализ неприменим, а фронт (как и катодно-направленный фронт в газах) является “выталкиваемым”. В противоположном предельном случае ($\mathcal{D}_h = 0$) подобных проблем не возникает и фронт всегда (в рамках принятой модели) является “вытягиваемым”. В этом и состоит основное различие между анодно- и катодно-направленными ВУИ в газах при сильной локализации начального возмущения, указанное и подтвержденное путем численного моделирования в работах [7]. Его причиной является то, что в первом случае направление дрейфа электронов совпадает с направлением диффузионного потока и распространения волны, а во втором – противоположно им. В полупроводниках же фронты должны быть “вытягиваемыми” в любом случае, поскольку направление дрейфа одного из типов, ионизирующих среду носителей заряда, обязательно совпадает с направлением распространения волны. Отражением качественного различия между монополярными и биполярными ВУИ является уже отмеченный факт несоответствия формул (10) и (11) при сколь угодно малых, но отличных от нуля значениях \mathcal{D}_e .

Конечно, все сказанное выше нельзя считать строгим доказательством того, что при биполярной ударной ионизации стационарно движущиеся фронты существуют и являются “вытягиваемыми”. Поэтому для проверки изложенных выше результатов было проведено численное моделирование нестационарного процесса распространения ВУИ в условиях, соответствующих задаче (1)–(3). При моделировании предполагалось, что $\mathcal{D}_e = \mathcal{D}_h = \text{const}$, а для зависимостей $\alpha_{e,h}(E)$ и $v_{e,h}(E)$ использовались обычные аппроксимации $\alpha_{e,h}(E) = \tilde{\alpha}_{e,h} \exp[-(\tilde{E}_{e,h}/E)^k]$ и $v_{e,h}(E) = v(E) = v_s E/(E + E_s)$, где $\tilde{\alpha}_{e,h}$, $\tilde{E}_{e,h}$, v_s , E_s – константы материала, $k = 1, 2$. Вычисления проводились для различных комбинаций значений k , $\tilde{\alpha}_e/\tilde{\alpha}_h$, \tilde{E}_h/\tilde{E}_e , $\tilde{\alpha}_e D/v_s$, E_0/\tilde{E}_e , $\lambda_0 D/v_s$ и продолжались до тех пор, пока параметры фронта не начинали изменяться менее чем на 1% при удвоении времени эволюции начального возмущения. Такая стабилизация фронта наблюдалась во всех рас-

²⁾ Важно отметить, что при этом на скорость фронта не влияют ни термоэлектрические эффекты, ни нелинейная рекомбинация, ни возможная нелокальная зависимость кинетических коэффициентов от E .

смотренных случаях, причем безразмерные величины $\mathcal{U}_S = u_S/v_0$ и $\mathcal{L}_S = \lambda_S D_0/v_0$ зависели только от комбинаций $\mathcal{D}_{e,h} = \alpha_{e,h} D/v_0$ и $\mathcal{L}_0 = \lambda_0 D_0/v_0$ в точном соответствии с изложенной выше линейной теорией. Именно, при $\mathcal{L}_0 < \mathcal{L}^*$ выполнялись соотношения $\mathcal{U}_S = u_+(\lambda_0)/v_0$ и $\mathcal{L}_S = \mathcal{L}_0$, при $\mathcal{L}_0 = \mathcal{L}^*$ величины $\mathcal{U}_S, \mathcal{L}_S$ достигали значений $\mathcal{U}^*, \mathcal{L}^*$ и переставали изменяться с дальнейшим ростом \mathcal{L}_0 . Эти результаты (они проиллюстрированы на рис.1 для двух пар значений $\mathcal{D}_{e,h}$) подтверждают существование стационарных ВУИ в полупроводниках и принадлежность их фронтов к классу “вытягиваемых”.

В заключение отметим, что роль диффузии должна быть особенно важной в непрямозонных полупроводниках, где (в отличие от газов и прямозонных полупроводников) скорость фотоионизации перед фронтом, скорее всего, пренебрежимо мала. При максимальных достижимых значениях $E_0 \sim 10^6$ В/см (например, в стримерах [3] или сильно перенапряженных диодах [10]) и типичных значениях $v_0 \sim 10^7$ см/с, $D_0 \sim 30$ см²/с, $\tilde{\alpha}_{e,h} \sim 10^6$ см⁻¹ получается $\mathcal{D}_{e,h} \sim 1$, так что “диффузионная” скорость распространения ВУИ должна превосходить v_0 примерно в три раза. Если же по каким-либо причинам фронт ВУИ окажется “вытаскиваемым”, минимальная скорость его распространения будет еще больше. В принципе это возможно при наличии падающих участков на зависимостях $v, D(E)$. Однако предварительные результаты численных экспериментов,

выполняемых в настоящее время, показывают, что и при типичных для полупроводников падающих зависимостях $v, D(E)$ фронты ВУИ все-таки остаются “вытягиваемыми”.

Автор благодарен А.В. Горбатюку за обсуждение вопросов, затронутых в настоящей статье. Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты # 05-02-16541 и # 05-08-18235).

1. D. J. Bartelink and D. L. Scharfetter, Appl. Phys. Lett. **14**, 320 (1969).
2. Н. Г. Басов, А. Г. Молчанов, А. С. Насибов и др., ЖЭТФ **70**, 1751 (1976).
3. М. И. Дьяконов, В. Ю. Качоровский, ЖЭТФ **94**, 321 (1988); **95**, 1850 (1989); **98**, 895 (1990).
4. А. С. Кюрегян, ФТП **41**, 761 (2007).
5. А. И. Захаров, И. Г. Персианцев, В. Д. Письменный и др., ПМТФ №1, 56 (1973).
6. А. Н. Лагарьков, И. М. Руткевич, Волны электрического пробоя в ограниченной плазме, М.: “Наука”, 1989.
7. U. Ebert, W. van Saarloos, and C. Caroli, Phys. Rev. Lett. **77**, 4178 (1996); Phys. Rev. E **55**, 1530 (1997).
8. А. Н. Колмогоров, И. Г. Петровский, Н. С. Пискунов, Бюл. МГУ, Математика и механика **1**, 1 (1937).
9. W. van Saarloos, Phys. Reports **386**, 29 (2003).
10. P. Rodin, U. Ebert, W. Hundsdorfer, and I. Grekhov, J. Appl. Phys. **92**, 958 (2002).