Письма в ЖЭТФ, том 47, вып. 11, стр. 551 – 554 *10 июня 1988 г.*

КИРАЛЬНАЯ БОЗОНИЗАЦИЯ НА РИМАНОВЫХ ПОВЕРХНОСТЯХ В ОПЕРАТОРНОМ ФОРМАЛИЗМЕ

А.М.Семихатов

Операторная алгебра фермионной bc-системы на римановой поверхности C глобально представлена в терминах операторов бозонной конформной теории на C. Операторные соотношения порождают формулы бозонизации для корреляционных функций. Основой конструкции является операторное обобщение функции Бейкера – Ахиезера.

Один из основных примеров конформной теории на римановых поверхностях дается системой J- и $(1-J)$- дифференциалов b и c [1] [1)], а самым, по-видимому, действенным способом работы с bc-системой оказывается бозонизация [2 – 5]. Результатом бозонизации являются выражения для корреляторов bc-системы, интерпретируемые как корреляторы некоторой бозонной теории типа скалярного поля. Однако, как в подходах в духе континуального интеграла [2 – 4], так и при использовании τ-функций [5], остается невыясненным, какая же именно бозонная конформная теория на римановой поверхности отвечает bc-системе. При бозонизации с помощью τ-функции именно использование последней как промежуточного шага затемняет вопрос о глобальной конструкции для бозонных операторов, соответствующих фермионам. В рамках же континуального интеграла бозонная теория плохо определена, поскольку глобальные свойства римановой поверхности учитываются путем введения многозначного скалярного поля φ, имеющего локальную "квантовую" часть и "классическую" часть, которой разрешается (и даже предписывается) совершать скачки при обходе вокруг нетривиальных циклов.

Цель настоящей работы состоит в том, чтобы построить последовательно операторную бозонизацию (фермионной) bc-системы, т. е. указать бозонную конформную теорию на римановой поверхности и систему операторов этой теории, глобально представляющих операторы bc-системы. Предлагаемая конструкция сводится, по существу, к реализации следующих трех замечаний : а) скалярное поле $\varphi(z)$, участвующее в локальных формулах бозонизации [1]

$$\hat{b}(u) = e^{-\varphi(u)}, \quad \hat{c}(u) = e^{\varphi(u)}, \qquad e^{-\varphi(u)} e^{\varphi(v)} = \frac{1}{v-u}\; {:}\, e^{-\varphi(u)}\, e^{\varphi(v)} \,{:} \tag{1}$$

(где $\wedge$ обозначает бозонизацию) и не являющееся настоящим конформным полем даже локально [1], должно рассматриваться как линейный интеграл $\int^{z} \partial\varphi$ от тока $\partial\varphi$. Последний в случае (1) совпадает с током j bc-системы, который уже глобально определен на поверхности произвольного рода; б) скачки поля φ теперь естественно интерпретируются как результат намоток контура интегрирования на гомологии; в) объектом, обобщающим $\exp \int^{z} j$, но нечувствительным к намоткам контура, является функция Бейкера – Ахиезера (БА) [7]. Операторно-значные функции БА и осуществляют глобальную бозонизацию (формулы (3), (4) и (7) ниже).

1. Итак, основным объектом бозонной теории является ток $\widetilde{T}$ – операторный 1-дифференциал на римановой поверхности C рода g. Нормируя на нулевые a-периоды, введем

---

1) При $J = 2$ получаем духи в бозонной струне, что и является источником "прикладного" интереса к bc-системам. Внимание к римановым поверхностям рода >2 также привлечено струнными потребностями [2 – 6].

ток $I = \tilde{I} - \sum_{j=1}^{g} \omega_j \frac{1}{2\pi i} \oint_{a_j} \tilde{I}$, где ω_j – голоморфные 1-дифференциалы [8]. В нижеследующих формулах нормальное упорядочение составных операторов, построенных из тока I, производится, как обычно, вычитанием всех возможных спариваний, причем

$$\overline{I(u)I}(v) \equiv \langle 0 | I(u) I(v) | 0 \rangle = d_u d_v \ln E(u, v), \tag{2}$$

где E – главная форма поверхности [8], а $|0\rangle$ – вакуум бозонной теории.

2. Процедура бозонизации должна учитывать теорему о балансе духового числа, согласно которой ненулевыми являются лишь те bc-корреляторы, в которых на $L \equiv (2J-1)(g-1)$ больше вставок b, чем c. Соответственно, мы можем предложить формулы бозонизации только для операторов, являющихся (дифференциальными) полиномами по b и c с указанным преобладанием операторов b.

В простейшем случае имеется только произведение $b(P_1) \dots b(P_L)$, $P_\alpha \in C$. Фиксируем точку общего положения $Q \in C$. Построим такой оператор $B_J(P_\alpha, Q)$, чтобы для корреляторов на C было выполнено

$$\langle \mathcal{O} \rangle_c = \langle 0 | \hat{\mathcal{O}} B_J | 0 \rangle .$$

Пусть $\mathcal{P}$ обозначает дивизор $\mathcal{P} = \Sigma P_\alpha$, а Δ – класс Римана [8]. Тогда

$$B_J = :\exp\left(\frac{2J-1}{2\pi i} \sum_{j=1}^{g} \oint_{a_j} \omega_j(y) \int_Q^y I\right) \exp\left(-\int_{(2J-1)\Delta}^{\mathcal{P}} I\right) \theta\left(\mathcal{P} - (2J-1)\Delta - \oint_b I\right): \tag{3}$$

Поясним, что аргумент θ-функции в (3) имеет в более подробной записи вид

$$\int_{(2J-1)\Delta}^{\mathcal{P}} \omega_i - \oint_{b_i} I = \sum_{\alpha=1}^{L} \int_R^{P_\alpha} \omega_i - (2J-1)\kappa_i^{(R)} - \oint_{b_i} I ,$$

где $\kappa^{(R)}$ – вектор Римановых констант. В (3) и формулах ниже, кроме того, подразумеваются θ-функции с характеристиками, определяемыми спинорной структурой bc-теории [4]. Первый экспоненциальный множитель в (3) задает фоновый заряд $Q = 2J - 1$ [1], остальные же множители определяют операторную L-точечную функцию БА.

3. Все, что может появиться в корреляторах $\langle b \dots bc \dots c \rangle$ на фоне $b(P_1) \dots b(P_L)$ – это некоторое число пар $b(u)c(v)$. Для этого произведения (но не для b- и c-операторов по отдельности !) имеем

$$\widehat{b(u)c}(v) = \frac{1}{E(u, v)} : \exp \int_u^v I : \left(\frac{E(v, Q)}{E(u, Q)}\right)^{(2J-1)g} \frac{E(u, (2J-1)\Delta)}{E(v, (2J-1)\Delta)} , \tag{4}$$

где для дивизора $\mathcal{A} = \Sigma P_i - \Sigma Q_j$ обозначено

$$E(u, \mathcal{A}) = \prod_i E(u, P_i) \left(\prod_j E(u, Q_j)\right)^{-1} .$$

Произведение всех главных форм в (4) является J-дифференциалом по u и $(1-J)$–дифференциалом по v. Отметим, что (4) представляет собой обобщение локальных формул (1), которые можно переписать в виде

$$\widehat{b(u)c}(v) = \frac{1}{v-u} : \exp \int_u^v \partial\varphi :$$

В правой части (4), в отличие от функции БА в (3), отсутствует θ-функция вида $\theta(\oint_b I \dots$

компенсирующая зависимость интеграла от намоток. Попытка явно ввести ее в (4) неприемлема, поскольку не позволяет получить для корреляционных функций выражения, найденные в [4]. Положение замечательным образом исправляется, однако, за счет следующего результата о нормальном упорядочении:

$$: \exp \int_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} I : : \theta(e - \oint_b I) : = : \theta(e + \mathcal{A} - \mathcal{B} - \oint_b I) \exp \int_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} I : \tag{5}$$

($\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ – дивизоры степени n). Используя эту формулу вместе с другим аналогичным результатом

$$: \exp \int_u^v I : : \exp \frac{2J-1}{2\pi i} \sum_{j=1}^{g} \oint_{a_j} \omega_j(y) \int_Q^y I : = \left(\frac{\sigma(u)}{\sigma(v)}\right)^{2J-1} \left(\frac{E(u,Q)}{E(v,Q)}\right)^{(2J-1)g} \quad (\text{норм. упор}), \tag{6}$$

где

$$\sigma(u) = \exp\left(-\frac{1}{2\pi i} \sum_{i=1}^{g} \oint_{a_i} \omega_i(y) \ln E(y,u)\right),$$

находим

$$\widehat{b(u)c\,v)}B_J = \frac{1}{E(u,v)} \left(\frac{\sigma(u)}{\sigma(v)}\right)^{2J-1} \frac{E(u,\mathcal{P})}{E(v,\mathcal{P})} : \exp \int_u^v I \exp - \int_{(2J-1)\Delta}^{\mathcal{P}} I$$

$$\exp \frac{2J-1}{2\pi i} \sum_{i=1}^{g} \oint_{a_i} \omega_i(y) \int_Q^y I \quad \frac{\theta(\mathcal{P} - (2J-1)\Delta + u - v - \oint_b I)}{\theta(\mathcal{P} - (2J-1)\Delta)} : . \tag{7}$$

Эффект формулы (5) состоит в сдвиге аргумента θ-функции в (7) на $u - v = -\int_u^v \omega_k$, что в точности необходимо для восстановления БА-структуры и, значит, для компенсации намоток $\exp \oint_b I$. Более того, "подстройка" аргумента θ-функции происходит аналогичным образом для любого числа пар $\widehat{b(u_i)c(v_i)}$ в левой части (7). При этом в правой части (7), в результате нормального упорядочения, появляются еще дополнительные множители, которые оказываются в точности такими, что при взятии $\langle 0 | \ldots | 0 \rangle$ – среднего воспроизводятся правильные выражения для корреляционных функций. В частности, непосредственно из (7) имеем

$$\langle 0 | \widehat{b(u)c(v)} B_J | 0 \rangle = \frac{1}{E(u,v)} \left(\frac{\sigma(u)}{\sigma(v)}\right)^{2J-1} \frac{E(u,\mathcal{P})}{E(v,\mathcal{P})} \frac{\theta(u - v + \mathcal{P} - (2J-1)\Delta)}{\theta(\mathcal{P} - (2J-1)\Delta)},$$

что совпадает с выражением для bc-пропагатора на римановой поверхности [4].

4. При $J = 1/2$ наступают значительные упрощения. В частности, сравнивая (3) с формулами работ [9], получаем интересное операторное тождество, предсказанное А.О.Радулом:

$$\exp\left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \oint_Q b(u) \oint_Q c(v) S(u,v) = \text{const}\, \theta(-\oint_b I),$$

где $S(u,v)$ – регуляризованный пропагатор для фермионов со спином $1/2$ [9, 4, 8]. Более того, из (3) при произвольном J можно получить выражение [5] для алгебро-геометрической τ-функции.

Я благодарен А.О.Радулу за сотрудничество на ранних этапах этой работы. Я также благодарю В.Я.Файнберга и А.А.Цейтлина за полезные обсуждения.

Литература

1. *Friedan D., Martinec E., Shenker S.* Nucl. Phys. B, 1986, **271**, 93.
2. *Alvarez-Gaumé L., Moore G., Vafa C.* Comm. Math. Phys., **1986, 106**, 1; *Alvares-Gaumé L., Bost J.B., Moore G. et al.* Comm. Math. Phys., 1987, **112**, 503.
3. *Knizhnik V.G.* Phys. Lett. B, 1986, **180**, 247.
4. *Verlinde E., Verlinde H.* Nucl. Phys. B, 1987, **288**, 357.
5. *Alvarez-Gaumé L., Gomez C., Moore G., Vafa C.* Strings in the operator formalism, CERN-TH.4883/87.
6. *Манин Ю.И.* Письма в ЖЭТФ, 1986, **43**, 161; *Книжник В.Г.* Письма в ЖЭТФ, 1987, **46**, 8; *Морозов А.Ю.* Письма в ЖЭТФ, 1988, **47**, 181.
7. *Дубровин Б.А.* УМН, 1981, **36**, 11; *Кричевер И.М.* УМН, 1977, **32**, 183.
8. *Fay J.* Theta functions of Riemann surfaces, LNM 352, 1973.
9. *Ishibashi N., Matsuo Y., Ooguri H.* Mod. Phy. Lett. A, 1987, **2**, 119; *Vafa C.* Phys. Lett. B, 1987, **190**, 47.

Физический институт им. П.Н.Лебедева
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
19 апреля 1988 г.