

Уравнения Захарова с нулевой гармоникой и новый тип модуляционной неустойчивости

Ю. В. Седлецкий¹⁾

Институт физики НАН Украины, 03028 Киев, Украина

Поступила в редакцию 13 августа 2007 г.

После переработки 11 сентября 2007 г.

Показано, что система уравнений Захарова для амплитуд первой и нулевой гармоник волн на поверхности идеальной жидкости описывает, кроме известного типа модуляционной неустойчивости (МН) огибающей основной гармоники по отношению к малым волновым векторам κ гармонических возмущений (МН Бенджамена-Фейра), также и МН комбинации основной и нулевой гармоник, при κ порядка волнового вектора k_0 основной гармоники. В отличие от МН Бенджамена-Фейра, свойственной большой глубине, описанная МН не исчезает при $k_0 h < 1.363$.

PACS: 02.60.Cb, 47.15.Hg, 92.10.—c

1. Введение. Неустойчивость найденных Стоксом [1] слабонелинейных периодических решений нелинейных уравнений, описывающих движение волн в консервативных средах, к малым гармоническим длинноволновым возмущениям (модуляционная неустойчивость Бенджамена – Фейра, МН БФ, МН на боковых частотах первой гармоники) открыта сначала для волн на поверхности идеальной жидкости в работах Лайтхилла [2], Захарова [3, 4], Бенджамена и Фейра [5], Уизема [6], Хасимото и Оно [7], а затем и во многих других нелинейных средах и является общезначимым явлением. В результате работ [3, 4, 8] стало ясно, что аналогия между поведением волн малой амплитуды в различных средах может быть объяснена сходством разложений гамильтониана волн разной природы в степенной ряд по малой нелинейности и дальнейшей переформулировкой эйлеровых уравнений движения различных волн в формально одинаковые уравнения Гамильтона. Гамильтонова теория волн на поверхности жидкости и в плазме стала лишь первым примером для предложенной и разработанной Захаровым в [3, 4] общей программы по расширению гамильтонового формализма из нелинейной механики частиц на волновое движение в непрерывной среде: отыскание пар канонических переменных, построение гамильтониана волн в физическом и фурье-пространстве, нахождение первых нелинейных членов разложения его в ряд, получение отсюда упрощенных уравнений движения для амплитуд нижайших гармоник как уравнений Гамильтона из разложенного в ряд и освобожденного от высших гармоник гамильтониана (уравнение За-

харова). На основе полученных в [3, 4] уравнений и вычисленных в случае бесконечной глубины коэффициентов в числе других задач изучена и МН, проложен путь к разным клонам МН путем введения N-волнового взаимодействия.

В работе [9] теория [3, 4] была применена и для ограниченной глубины. В этом случае, кроме большого технического усложнения по включению в коэффициенты гамильтониана их зависимости от глубины h , есть и принципиальное отличие – появление среди фурье-гармоник не осциллирующей компоненты (нулевой гармоники, изменяющейся, по терминологии метода многих масштабов, в “медленном” времени), которая в случае бесконечной глубины в рассматриваемом порядке точности равна нулю. Высшие гармоники убираются из гамильтониана и уравнений движения с помощью редукции гамильтониана. Но сделать то же самое с нулевой гармоникой можно только при дополнительных предположениях (приближениях) о характере ее зависимости от времени. Исключение уравнения для нулевой гармоники может привести к уменьшению порядка дисперсионного уравнения и, таким образом, к потере части его решений. В [9] не выполнялась редукция гамильтониана и сохранялось уравнение для нулевой гармоники, что позволяло бы рассмотреть широкий спектр задач, однако для аналитических оценок была рассмотрена только область волновых векторов возмущений κ , малых по сравнению с волновым вектором первой гармоники k_0 . Можно предположить, что при действии на первую гармонику возмущения с волновым вектором $\kappa \sim k_0$ в результате нелинейного резонансного взаимодействия [10, 11] будет отзывать 0-гармоника с волновым вектором 0, если она

¹⁾e-mail: sedlets@iop.kiev.ua

возможна в системе и соблюдается закон сохранения энергии.

В недавних работах автора [12, 13] в той же задаче, что и в [9], но на основе системы, полученной в [14, 15] из эйлеровых уравнений движения, было указано, что при $\kappa \simeq k_0$ действительно имеется полоса МН. Возникает вопрос, получается ли она в гамильтоновском подходе [9]. В данном сообщении нами проверены выкладки [9], устранена указанная ниже мелкая погрешность, численно изучена более широкая, чем в [9], область κ , и при $\kappa \simeq k_0$ найдена, как и в [13], полоса МН связанной системы нулевой и первой гармоник (а не только первой, как в случае обычной МН БФ), не исчезающая при малых глубинах $k_0 h$. Такая МН комбинации быстро осциллирующей и медленно меняющейся волн может эволюционировать в образование, промежуточное между солитонами огибающей глубокой воды и уединенными волнами собственными малой глубине $k_0 h$. Объяснение механизма формирования реально существующих в открытом океане волн-убийц на основе МН, исходя из полных нелинейных уравнений движения, дано в [16].

2. Уравнения движения. В гамильтоновом формализме потенциальных нелинейных волн гамильтониан раскладывается в ряд по степеням “комплексной нормальной координаты” $a(k)$ и ее сопряженной $\bar{a}(k)$ и уравнение движения для $a(k, t)$ записывается в форме уравнения Гамильтона

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} a(k, t) + i[\omega(k) a(k) + \\ & + \int_{-\infty}^{\infty} V(k, k - \xi, \xi) a(\xi) a(k - \xi) d\xi + \\ & + 2 \int_{-\infty}^{\infty} V(k + \xi, k, \xi) \bar{a}(\xi) a(k + \xi) d\xi + \\ & + \int_{-\infty}^{\infty} U(-k - \xi, k, \xi) \bar{a}(\xi) \bar{a}(-k - \xi) d\xi + \\ & + \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} W(\xi + \zeta - k, k, \xi, \zeta) \times \\ & \times a(\xi) a(\zeta) \bar{a}(\xi + \zeta - k) d\xi d\zeta] = 0 \end{aligned} \quad (1)$$

и комплексно сопряженного уравнения [3, 4]. Здесь опущены остальные члены четвертого и более высоких порядков, проявляющие себя в следующих приближениях. Для волн на поверхности идеальной жидкости профиль волны $\eta(\mathbf{x}, t)$, связан с $a(\mathbf{k}, t)$ соотношением

$$\eta(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2\pi} \int \left(\frac{\omega(\mathbf{k})}{2g} \right)^{1/2} (a(\mathbf{k}, t) + \bar{a}(-\mathbf{k}, t)) e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} d\mathbf{k},$$

где

$$\omega(\mathbf{k}) = \sqrt{g|\mathbf{k}| \tanh(|\mathbf{k}|h)} \quad (2)$$

– закон дисперсии линейных волн, g – ускорение свободного падения, h – глубина жидкости, \mathbf{k} – горизонтальный волновой вектор, $\mathbf{x} = (x, y)$ – вектор горизонтальных координат. В случае бесконечной глубины жидкости коэффициенты разложения $V(k, k_1, k_2), U(k, k_1, k_2), W(k, k_1, k_2, k_3)$ найдены в [3, 4], для произвольной глубины – в [9]. Этим коэффициентам, как и развитию самого подхода посвящен ряд работ, см., например, [17–27].

Пусть волновое поле представляет собой импульс с центральным волновым вектором k_0 . Тогда фурье-амплитуда первой гармоники и ее сопряженное сосредоточены вблизи волнового вектора k_0 :

$$a_1 = a_1(k, t) \delta(k - k_0). \quad (3)$$

Нелинейные члены уравнений движения порождают не осциллирующую компоненту поля (нулевую гармонику), вторую и высшие гармоники. Их учет будем вести разложением по формальному параметру малости ε :

$$a = \varepsilon a_1 + \varepsilon^2 (b + a_2). \quad (4)$$

Нулевая гармоника и ее сопряженное сосредоточены в области волнового вектора $k = 0$:

$$b \rightarrow b(k, t) \delta(k), \quad (5)$$

а вторая гармоника $a_2 = a_{21} + a_{22}$ состоит из компонент волнового поля

$$a_{21} = a_{21}(k, t) \delta(k - 2k_0), \quad (6)$$

$$a_{22} = a_{22}(k, t) \delta(k + 2k_0), \quad (7)$$

скоцентрированных на волновых векторах $2k_0$ и $-2k_0$, соответственно.

С целью составить приближенные уравнения движения для фурье-амплитуд низших гармоник a_1 и b подставим (4) в (1) и соберем слагаемые с одинаковыми степенями ε .

В порядке ε имеем уравнения движения для первой гармоники линейного приближения:

$$\frac{\partial}{\partial t} a_1(k) + i\omega(k) a_1(k) = 0. \quad (8)$$

В порядке ε^2 получаем уравнения движения для нулевой и второй гармоник:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} a_2(k) + i\omega(k) a_2(k) + \frac{\partial}{\partial t} b(k) + i\omega(k) b(k) + \\ & + i \int_{-\infty}^{\infty} a_1(\xi) V(k, k - \xi, \xi) a_1(k - \xi) d\xi + \\ & + 2i \int_{-\infty}^{\infty} \bar{a}_1(\xi) V(k + \xi, k, \xi) a_1(k + \xi) d\xi + \\ & + i \int_{-\infty}^{\infty} \bar{a}_1(\xi) U(k, -k - \xi, \xi) \bar{a}_1(-k - \xi) d\xi = 0. \quad (9) \end{aligned}$$

В первом нелинейном члене (9) учтем, что в него входят сосредоточенные на волновом векторе k_0 (3) первые гармоники $a_1(\xi)$ и $a_1(k - \xi)$. Поэтому $\xi = k_0$ и $k - \xi = k_0$. Следовательно, переменная интегрирования ξ лежит в окрестности k_0 , а волновой вектор k , для которого это нелинейное слагаемое отлично от нуля, есть $2k_0$. Таким образом, первое нелинейное слагаемое надо сгруппировать вместе с линейными слагаемыми $\frac{\partial}{\partial t} a_{21}(k) + i\omega(k) a_{21}(k)$, которые также сконцентрированы на волновом векторе $2k_0$. Получаем эволюционное уравнение для первой компоненты $a_{21}(k, t)$ фурье-амплитуды второй гармоники

$$\begin{aligned} 2k_0 : \quad & \frac{\partial}{\partial t} a_{21}(k) + i\omega(k) a_{21}(k) + \\ & + iV(2k_0, k_0, k_0) \int_{-\infty}^{\infty} a_1(\xi) a_1(k - \xi) d\xi = 0. \quad (10) \end{aligned}$$

Аналогично получаем уравнения для $a_{22}(k, t)$ и $b(k, t)$:

$$\begin{aligned} -2k_0 : \quad & \frac{\partial}{\partial t} a_{22}(k) + i\omega(k) a_{22}(k) + \\ & + iU(-2k_0, k_0, k_0) \int_{-\infty}^{\infty} \bar{a}_1(\xi) \bar{a}_1(-k - \xi) d\xi = 0, \quad (11) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 : \quad & \frac{\partial}{\partial t} b(k) + i\omega(k) b(k) + \\ & + i f(k) \int_{-\infty}^{\infty} \bar{a}_1(\xi) a_1(k + \xi) d\xi = 0. \quad (12) \end{aligned}$$

Тут обозначено

$$f(k) = 2V(k_0, k_0, k). \quad (13)$$

Уравнения (10), (11) позволяют выразить вторую гармонику через первую с целью учесть эту связь в дальнейшем для удаления второй гармоники из всех выражений приближения ε^3 . Учитывая временную зависимость $a_{21}(k, t) \sim e^{-2i\omega(k_0)t}$ и $a_{22}(k, t) \sim e^{2i\omega(k_0)t}$, получаем из (10) и (11) соответственно

$$a_{21}(k) = \frac{V(2k_0, k_0, k_0)}{2\omega(k_0) - \omega(2k_0)} \int_{-\infty}^{\infty} a_1(\xi) a_1(k - \xi) d\xi, \quad (14)$$

$$a_{22}(k) = -\frac{U(-2k_0, k_0, k_0)}{2\omega(k_0) + \omega(2k_0)} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{a}_1(\xi) \bar{a}_1(-k - \xi) d\xi. \quad (15)$$

Уравнение (12) не интегрируем, чтобы не применять дополнительные предположения о характере зависимости $b(k)$ от времени, и (12), как уравнение движения для 0 – гармоники $b(k)$, образует систему с уравнением для первой гармоники $a_1(k)$ следующего приближения.

В порядке ε^3 , рассуждая, как и при получении (10), и учитывая, что $a_2 = a_{21} + a_{22}$, оставляем только слагаемые, сосредоточенные на волновом векторе k_0 :

$$2iV(2k_0, k_0, k_0) \int_{-\infty}^{\infty} \bar{a}_1(\xi) a_{21}(k + \xi) d\xi, \quad (16)$$

$$2iU(k_0, k_0, -2k_0) \int_{-\infty}^{\infty} \bar{a}_1(\xi) \bar{a}_{22}(-k - \xi) d\xi, \quad (17)$$

$$2i \int_{-\infty}^{\infty} V(k_0, k_0, k_0 - \xi) b(k - \xi) a_1(\xi) d\xi, \quad (18)$$

$$2i \int_{-\infty}^{\infty} V(k_0, k_0, \xi - k_0) \bar{b}(\xi - k) a_1(\xi) d\xi, \quad (19)$$

$$\begin{aligned} & iW(k_0, k_0, k_0, k_0) \int_{-\infty}^{\infty} a_1(\zeta) \times \\ & \times \int_{-\infty}^{\infty} a_1(\xi) \bar{a}_1(-k + \xi + \zeta) d\xi d\zeta. \quad (20) \end{aligned}$$

Объединяем (8), (18), (19) и (20), а также (16) с учетом (14) и (17) с учетом (15). Соединим три последних выражения под одним интегралом. Имеем уравнение для первой гармоники:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} a_1(k) + i\omega(k) a_1(k) + \\ & + i \int_{-\infty}^{\infty} f(k_0 - \xi) b(k - \xi) a_1(\xi) d\xi + \\ & + i \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi - k_0) \bar{b}(\xi - k) a_1(\xi) d\xi + \\ & + i\lambda \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} a_1(\zeta) a_1(\xi) \bar{a}_1(-k + \xi + \zeta) d\xi d\zeta = 0, \quad (21) \end{aligned}$$

где обозначено

$$\begin{aligned} \lambda = & W(k_0, k_0, k_0, k_0) - \\ & - \frac{2V^2(2k_0, k_0, k_0)}{\omega(2k_0) - 2\omega(k_0)} - \frac{2U^2(-2k_0, k_0, k_0)}{\omega(2k_0) + 2\omega(k_0)}. \quad (22) \end{aligned}$$

Уравнения (21), (12), полученные здесь последовательным учетом приближений в (1), совпадают с уравнениями (19), (20) работы [9], в которой повторно варьировался гамильтониан после исключения из него второй гармоники (14), (15). Заметим только, что выражение (13) для $f(k)$ отличается последовательностью аргументов по сравнению с их очередностью в формуле (18) $f(k) = 2V(k, k_0, k_0)$ работы [9].

3. Модуляционная неустойчивость. Решение системы уравнений движения (21), (12), содержащее стоксову поправку на нелинейность, представим в виде

$$a(k) = \mathcal{A}_0 e^{-i t (\omega(k_0) + \lambda |\mathcal{A}_0|^2)} \delta(k - k_0), \quad b(k) = 0.$$

Введем возмущение

$$\begin{aligned} a(k) &= e^{-i t (\omega(k_0) + \lambda \mathcal{A}_0^2)} (\mathcal{A}_0 \delta(k - k_0) + \\ &+ \varepsilon \alpha(k) e^{-i \Omega t} \delta(k - k_0 - \varkappa) + \\ &+ \varepsilon \alpha(k) e^{i \Omega t} \delta(k - k_0 + \varkappa)), \quad (23) \\ b(k) &= \varepsilon \beta(k) e^{-i \Omega t} \delta(k - \varkappa) + \varepsilon \beta(k) e^{i \Omega t} \delta(k + \varkappa), \end{aligned}$$

где $\alpha(k)$, $\beta(k)$ действительны.

Будем исследовать возможность существования мнимой части в частоте Ω при некоторых волновых векторах волны возмущения \varkappa , в зависимости от нормированной глубины жидкости $k_0 h$, что будет означать неустойчивость невозмущенной волны к таким волновым векторам возмущения.

После линеаризации имеем закон дисперсии волн возмущения:

$$(\Omega - \gamma)^2 = \Delta^2 - 2\lambda(\Omega)\mathcal{A}_0^2 \Delta, \quad (24)$$

где обозначено

$$\lambda(\Omega) = -\lambda + \lambda^{(0)}(\Omega), \quad (25)$$

$$\lambda^{(0)}(\Omega) = \frac{f^2(-\varkappa)}{\omega(\varkappa) + \Omega} + \frac{f^2(\varkappa)}{\omega(\varkappa) - \Omega}, \quad (26)$$

$$\Delta = \frac{1}{2} [\omega(k_0 + \varkappa) + \omega(k_0 - \varkappa)] - \omega(k_0),$$

$$\gamma = \frac{1}{2} [\omega(k_0 + \varkappa) - \omega(k_0 - \varkappa)]$$

и совпадает с [9]. Верхний индекс в $\lambda^{(0)}(\Omega)$, подчеркивает, что это есть вклад в нелинейное взаимодействие от 0-гармоники.

Первое слагаемое в (25) рассчитываем из (22). Для волн на поверхности жидкости

$$\lambda = \frac{k_0^3}{32\pi^2} \frac{9\sigma^4 - 10\sigma^2 + 9}{\sigma^3}, \quad \sigma = \tanh k_0 h. \quad (27)$$

Вычислим второе слагаемое в (25). Для получения согласно (13) $f(\varkappa) = 2V(\varkappa, k_0, k_0)$ проводим упрощения $V(k, k_1, k_2)$ [21]. Имеем

$$f(\varkappa) = \frac{k_0^{3/2} \omega_0^{1/2}}{4\sqrt{2}\pi\sqrt{\sigma}} \left(2 \frac{\varkappa}{k_0} \sqrt{\frac{\omega_0}{\omega(\varkappa)}} + 1 - \sigma^2 \right). \quad (28)$$

Далее по (26)

$$\begin{aligned} \lambda^{(0)}(\Omega) &= \frac{k_0^3}{16\pi^2\sigma} \times \\ &\times \left(\frac{\varkappa^2}{\omega^2(\varkappa) - \Omega^2} \left(2 \frac{\omega_0}{k_0} + (1 - \sigma^2) \frac{\Omega}{\varkappa} \right)^2 + (1 - \sigma^2)^2 \right). \quad (29) \end{aligned}$$

Поскольку ставится цель изучить все четыре корня (24), не аппроксимируем Ω в знаменателе (26).

1) $\varkappa \ll k_0$. Сравнение с известными результатами. В этом случае возможна аппроксимация Ω в знаменателе (26). Асимптоты четырех корней $\Omega(\varkappa)$ (24) при малых \varkappa и \mathcal{A}_0 имеют вид

$$\Omega_{1,2} = c_g \varkappa \mp \frac{1}{6} \frac{\partial^3 \omega(k_0)}{\partial k^3} \varkappa^3, \quad \Omega_{3,4} = \pm \sqrt{gh} \varkappa, \quad (30)$$

где

$$c_g = \frac{\omega_0}{2k_0} \left(1 + \frac{1 - \sigma^2}{\sigma} k_0 h \right)$$

– групповая скорость линейных волн. Они показаны (после нормировки $\hat{\Omega} = \Omega/\omega_0$, $\hat{\varkappa} = \varkappa/k_0$) пунктирными кривыми 1a, 2a, 3a на графиках действительной части $\text{Re } \hat{\Omega}$ рис. 1. Отсюда первые два корня в случае $\varkappa \ll k_0$ с целью нахождения их мнимой части в следующем приближении можно аппроксимировать в коэффициенте перед \mathcal{A}_0^2 правой стороны (24) асимптотой $\Omega = \varkappa c_g$ (см. также для этого случая [25, 27]). Имеем

$$\begin{aligned} \lambda(\Omega) |_{\Omega=c_g \varkappa} &= \frac{k_0^3}{16\pi^2\sigma} \times \\ &\times \left(-\frac{9\sigma^4 - 10\sigma^2 + 9}{2\sigma^2} + \right. \\ &\left. + \frac{1}{gh - c_g^2} \left(2 \frac{\omega_0}{k_0} + (1 - \sigma^2) c_g \right)^2 + (1 - \sigma^2)^2 \right). \quad (31) \end{aligned}$$

Поскольку для выпуклой функции $\omega(k)$ по неравенству Йенсена $\Delta < 0$, (24) может иметь комплексные корни, если $\lambda(\Omega) < 0$. Коэффициент (31) (полученный при $f(\varkappa) = 2V(k_0, k_0, \varkappa)$) меняет знак при значении $k_0 h = 1.363$, что совпадает с глубиной, при которой исчезает МН Бенджамена-Фейра. Некоторое рассогласование (31) с полученной в том же пределе формулой (29) работы [9] связано с отмеченным выше расхождением в выборе последовательности аргументов в (13).

2) $\varkappa \simeq k_0$. Новая неустойчивость. При произвольных \varkappa необходим численный расчет корней уравнения (24). Уравнение четвертого порядка, полученное в [9] не решалось численно, а для анализа инкремента неустойчивости было сведено к квадратному

уравнению для малого отклонения Ω от резонансной поверхности $\omega(k_0 + \kappa) - \omega(k_0) = \omega(k_0) - \omega(k_0 - \kappa)$. Результаты численного табулирования зависимости действительной и мнимой частей $\hat{\Omega} = \Omega/\omega_0$ от $\hat{\kappa} = \kappa/k_0$ четырех корней уравнения (24) для нескольких значений $k_0 h$, при $k_0 A_0 = 0.2$ показаны на рис. 1, 2. Нумерация корней соответствует их асимптотам при

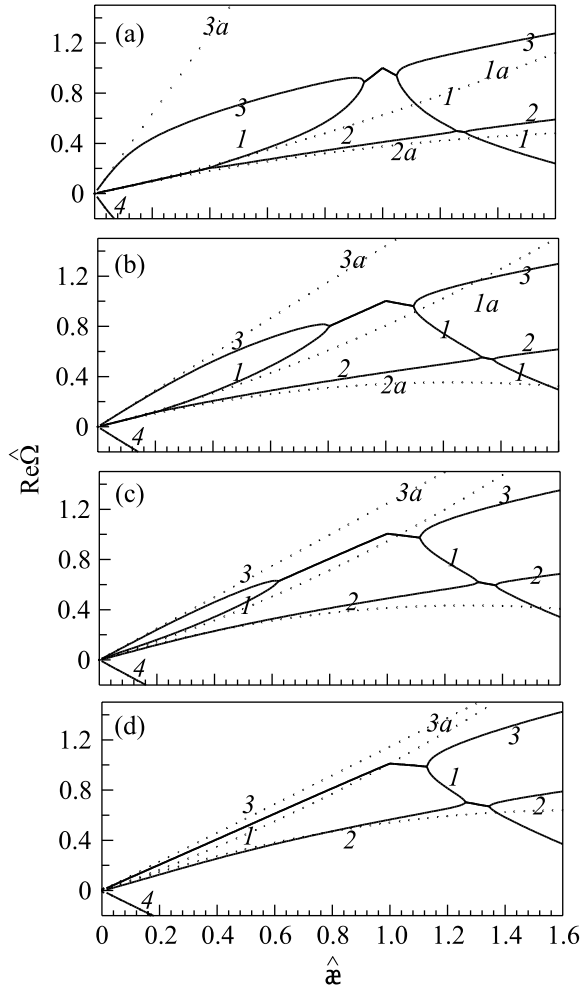


Рис. 1. $\text{Re}(\Omega/\omega_0)$ для (a) $k_0 h = 10$, (b) $k_0 h = 2$, (c) $k_0 h = 1.363$ и (d) $k_0 h = 1$ при $k_0 A_0 = 0.2$

малых κ (30). На рис. 2, кроме известной полосы неустойчивости при $\kappa \ll k_0$ (неустойчивость Бенджамена – Фейра), виден еще один участок неустойчивости при $\kappa \simeq k_0$. Третья полоса – правый край известной “восьмерки” Филлипса [10].

В отличие от неустойчивости БФ, которая исчезает при $k_0 h = 1.363$, дополнительная полоса неустойчивости существует при этой и меньших глубинах. Существенную роль в формировании этой неустойчивости играют и первая a_1 и 0-гармоника b , поэтому долговременная эволюция рассмотренной не-

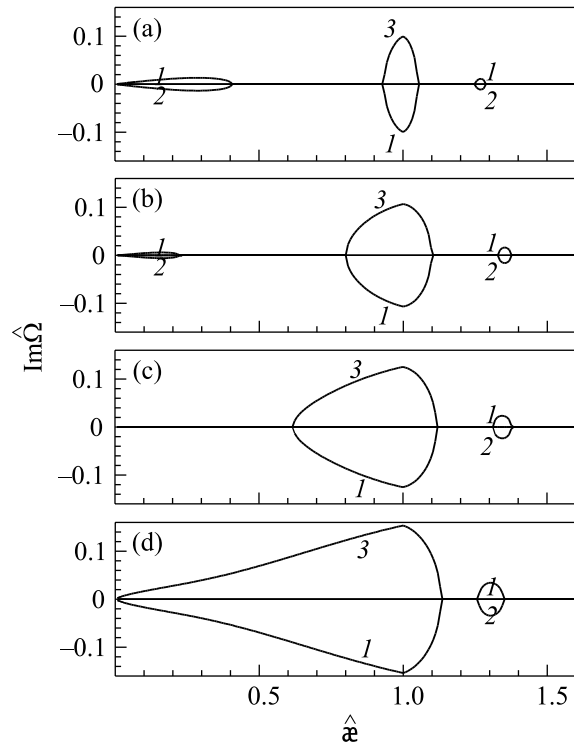


Рис. 2. $\text{Im}(\Omega/\omega_0)$ для (a) $k_0 h = 10$, (b) $k_0 h = 2$, (c) $k_0 h = 1.363$ и (d) $k_0 h = 1$ при $k_0 A_0 = 0.2$

устойчивости может вести к формированию образований, промежуточных между солитонами огibaющей быстрых осцилляций нелинейного уравнения Шредингера и уединенными волнами без заполнения, характерными для мелкой воды.

Автор признателен А.В. Цымбал за поддержку и помощь.

1. G. G. Stokes, Trans. Cambridge Philos. Soc. **8**, 441 (1849).
2. M. J. Lighthill, J. Inst. Math. Appl. **1**, 269 (1965).
3. В. Е. Захаров, ЖЭТФ **51**, 1107 (1966).
4. В. Е. Захаров, Журн. Прикл. Мех. и Техн. Физ. **№ 2**, 86 (1968).
5. Т. В. Benjamin, Proc. Roy. Soc. (London) A **299**, 59 (1967).
6. G. B. J. Whitham, Fluid Mech. **27**, 399 (1967).
7. Н. Hasimoto and Н. Ono, J. Phys. Soc. Jpn. **33**, 805 (1972).
8. В. Е. Захаров, Изв. ВУЗов. Радиофизика **17**, 431 (1974).
9. В. Е. Захаров, В. Г. Харитонов, Журн. Прикл. Мех. и Техн. Физ. **№ 5**, 45 (1970).
10. O. M. Phillips, J. Fluid Mech. **9**, 193 (1960); Proc. Roy. Soc. (London) **299**, 104 (1967).

11. V. E. Zakharov, F. Dias, and A. Pushkarev, *Phys. Reports* **398**, 1 (2004).
12. Yu. V. Sedletsy, *Phys. Lett. A* **243**, 293 (2005).
13. Yu. V. Sedletsy, *J. Phys. A: Math. Gen.* **39**, L529 (2006).
14. U. Brinch-Nielsen and I. G. Jonsson, *Wave Motion* **8**, 455 (1986).
15. Ю. В. Седлецкий, *ЖЭТФ* **124**, 200 (2003).
16. A. I. Dyachenko and V. E. Zakharov, *Письма в ЖЭТФ* **81**, 318 (2005); V. E. Zakharov, A. I. Dyachenko, and A. O. Prokofiev, *Eur. J. Mech. Fluids B* **25**, 677 (2006).
17. V. E. Zakharov, *Amer. Math. Soc. Transl.* **182**, 167 (1998).
18. V. E. Zakharov, *Eur. J. Mech. Fluids B* **18**, 327 (1999).
19. В. Е. Захаров, Е. А. Кузнецов *УФН* **167**, 1137 (1997).
20. В. П. Красицкий, *ЖЭТФ* **118**, 5, 1644 (1990).
21. V. P. Krasitskii, *J. Fluid Mech.* **272**, 1 (1994).
22. В. П. Красицкий, *Морск. Гидрофиз. Журнал.* **6**, 17 (1993).
23. М. М. Заславский, В. П. Красицкий, *Изв. АН. Физ. атмосферы и океана* **37**, 112 (2001).
24. Г. Юэн, Б. Лейк, *Нелинейная динамика гравитационных волн на глубокой воде*, М.: Мир, 1987.
25. M. Stiasnie and L. Shemer, *J. Fluid Mech.* **143**, 47 (1984).
26. Ray Q. Lin and W. Rennie, *J. Phys. Oceanography* **27**, 1813, 2169 (1997).
27. P. A. E. M. Janssen and M. Onorato, *Tech. Memorandum № 464, European Centre for Medium-Range Weather Forecasts*, 2005.