

Взаимодействие цилиндрической частицы с плоскими дисклинациями нематического жидкого кристалла

С. В. Бурьлов¹⁾

Киевский национальный университет им. Тараса Шевченко, 03022 Киев, Украина

Поступила в редакцию 3 июля 2007 г.

После переработки 29 августа 2007 г.

Предложено аналитическое описание упругого взаимодействия взвешенной в нематике цилиндрической частицы с плоской дисклинацией, параллельной ее длинной оси. Показано, что характер взаимодействия зависит от топологического заряда дисклинации. При этом сила, действующая на частицу со стороны дисклинации, может иметь как радиальную, так и азимутальную компоненты, величина которых зависит от расстояния между частицей и дисклинацией и от ориентации частицы относительно особых линий дисклинации.

PACS: 61.30.Jf

Тема настоящей работы имеет непосредственное отношение к суспензиям коллоидных частиц в нематических жидких кристаллах (НЖК). Такие материалы весьма перспективны с точки зрения приложений в современных системах обработки и отображения информации. Они сочетают в себе анизотропные оптические свойства матрицы носителя со специфическими, например, диэлектрическими [1] или магнитными [2, 3] свойствами дисперсной фазы. Благодаря этому удастся синтезировать новые жидкокристаллические (ЖК) материалы, которые по ряду физических параметров существенно отличаются от беспримесных систем и показывают специфические эффекты во внешних электрических и магнитных полях [1–4].

При теоретическом описании внутренней структуры суспензии каждая коллоидная частица рассматривается как макроскопический объект, взвешенный в нематической матрице [4–7]. Этот объект создает вокруг себя ориентационное искажение поля директора НЖК, которое можно отождествить с некоторой системой точечных и (или) линейных дефектов. Тогда естественно ожидать, что частицы будут взаимодействовать с дефектами самой нематической матрицы. Такой дисклинационный подход рассматривался ранее в литературе при описании поля директора вблизи сферической [8] и цилиндрической (стержнеобразной) [9] частиц, а также на примере взаимодействия двух частиц как сферической [10], так и цилиндрической формы [11]. Кроме того, известны теоретические и экспериментальные исследования взаимодействия сферической частицы с

дисклинационными линиями [12]. Однако специальных экспериментальных исследований по взаимодействию частицы, имеющей цилиндрическую форму, с линейными дефектами НЖК до настоящего времени не проводилось; теоретически данный вопрос также не обсуждался. Вместе с тем этот вопрос крайне важен, так как силы упругого взаимодействия между частицами и внешними ориентационными дефектами могут привести к перераспределению дисперсной фазы в суспензии и, в конечном счете, повлиять на макроскопические свойства ЖК образца.

В настоящей работе представлено аналитическое описание упругого взаимодействия цилиндрической частицы с плоской дисклинацией, имеющей топологический заряд m , здесь $m = \pm 1/2, \pm 1, \pm 3/2 \dots$. Предполагается, что на поверхности частицы заданы гомотропные граничные условия для директора НЖК. Как показывают эксперименты [2], во взвешенном состоянии такие частицы ориентируются своими длинными осями перпендикулярно директору. В этом же направлении лежит и ось внешней дисклинации. Поэтому ниже мы рассмотрим ситуацию, когда частица параллельна дисклинационной линии.

Введем цилиндрическую систему координат с осью z , направленной вдоль оси частицы. Полагая длину частицы L много больше ее радиуса R , искажениями вблизи торцов цилиндра будем пренебрегать. Тогда ожидаемые деформации ориентационной структуры НЖК будут носить характер плоских искажений с директором $\mathbf{n} = \cos \Phi \cdot \mathbf{e}_x + \sin \Phi \cdot \mathbf{e}_y$, где $\Phi = \Phi(r, \varphi)$. Равновесное распределение поля директора найдем из условия минимума свободной энергии НЖК. В предположении о жестком сцеплении директора с поверхностью частицы (энергия сцепления

¹⁾e-mail: burylov@westa-inter.com

бесконечно велика) и в двухконстантном приближении, когда модули упругости НЖК $K_{11} = K_{22} = K$, функционал F свободной энергии имеет вид

$$F = \frac{KL}{2} \int_V [(\operatorname{div} \mathbf{n})^2 + (\operatorname{rot} \mathbf{n})^2] dV = \frac{KL}{2} \int_V (\nabla \Phi)^2 dV. \quad (1)$$

Минимизация функционала (1) дает уравнение Лапласа: $\Delta_{r,\varphi} \Phi = 0$. Решением этого уравнения может быть любая суперпозиция искажений, которые задаются линейными дефектами с произвольными топологическими зарядами [13, 14]. При $r = R$ директор \mathbf{n} , отвечающий такому решению, должен быть перпендикулярен боковой поверхности цилиндра. На больших расстояниях $D \gg d$ поле директора должно соответствовать искажению, которое создается в НЖК внешней дисклинационной линией.

На первом этапе решения задачи представим взвешенную в нематике цилиндрическую частицу в виде локализованной системы дефектов. В отсутствие внешней дисклинации такая частица должна вписываться в однородное распределение директора – см. рис.1. Соответствующее решение было получено в [5]:

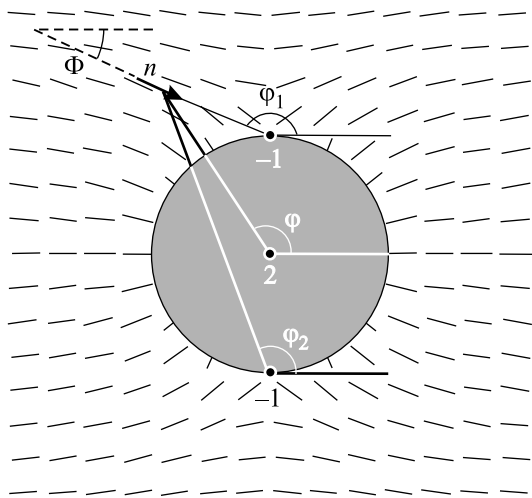


Рис.1. Дисклинационный способ описания частицы в однородном массиве нематика

$\Phi = \arctg[R^2 \sin 2\varphi / (r^2 + R^2 \cos 2\varphi)]$. Заметим, что конформное преобразование инверсии относительно круга радиуса R , которое эквивалентно замене $r \rightarrow (R^2/r')$ и $\varphi \rightarrow -\varphi'$ переводит данную функцию в решение для хорошо известной планарно-полярной (ПП) структуры НЖК в цилиндрическом капилляре [14, 15]. Как показано в [14], ПП структуру можно описать в виде суперпозиции искажений, которые задаются двумя дисклинационными линиями с зарядами $m'_1 = m'_2 = 1$, проходящими в диаметрально про-

тивоположных точках поверхности капилляра. Тогда обратное преобразование инверсии, которое меняет заряд дисклинационных линий на противоположный, переводит эти дисклинации в линейные дефекты с зарядами $m_1 = m_2 = -1$. Кроме того, на оси частицы формируется дисклинационная линия с топологическим зарядом $m_0 = 2$, которая является образом фиктивного искажения с зарядом $m'_\infty = -2$, размытого на бесконечности (или образом дисклинации с $m'_\infty = -2$, проходящей через бесконечно удаленную точку сферы Римана). Таким образом, взвешенная в нематике цилиндрическая частица описывается локализованной системой дисклинационных линий $\{-1, 2, -1\}$, а равновесному распределению директора отвечает функция $\Phi = 2\varphi - \varphi_1 - \varphi_2$, см. рис.1.

Заметим, что во многом аналогичный характер ориентационных деформаций возникает при описании искажений вблизи сферических частиц в свободно подвешенных плёнках смектика С с двумерным полем директора (см., например, [16]). Данная аналогия позволяет, по крайней мере с качественной точки зрения обобщить рассматриваемую задачу о взаимодействии цилиндрической частицы с линейными дефектами НЖК на случай взаимодействия сферических частиц и дисклинаций в мембранах смектика С.

Перейдем ко второму этапу решения задачи и поместим вблизи частицы на расстоянии $d \geq R$ внешнюю дисклинацию с зарядом m , см. рис.2. Последняя создает в НЖК искажение, которое опи-

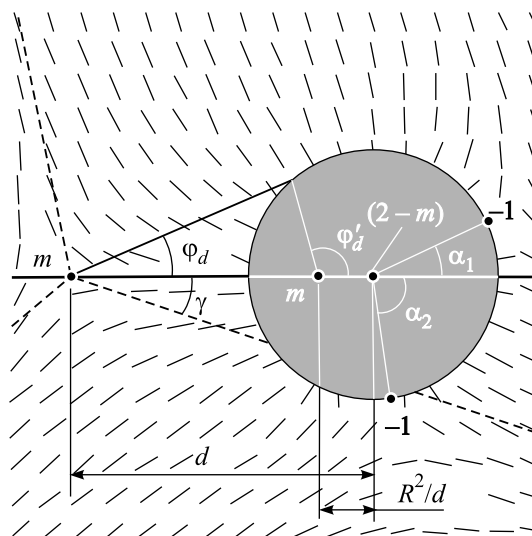


Рис.2. Перестройка системы дефектов частицы вблизи внешней дисклинации, здесь $m = -1/2$

сывается функцией $\Phi_d = m\varphi_d + \beta$, где β – начальная фаза дисклинации. Это искажение нарушает условие гомеотропного сцепления на поверхности части-

цы. Для удовлетворения заданных граничных условий при $r = R$ необходимо компенсировать как угловую функцию $m\varphi_d|_{r=R}$, так и отклонение, связанное с начальной фазой β . Первое достигается за счет введения двух фиктивных линейных дефектов с зарядами $(-m)$ и m , расположенных соответственно на оси частицы и на расстоянии (R^2/d) от оси; второе – за счет изменения взаимной ориентации двух поверхностных дефектов частицы с зарядами (-1) . Общее решение имеет вид

$$\Phi = m(\varphi_d + \varphi'_d) + (2-m)\varphi - \varphi_1 - \varphi_2 + \beta, \quad \beta = (\alpha_1 + \alpha_2)/2, \quad (2)$$

где углы α_1 и α_2 , задающие положения поверхностных дефектов, показаны на рис.2. Поскольку полный заряд частицы остается равным нулю, граничное условие при $r \sim D \gg d$, то есть $\Phi(r \gg d) = \Phi_d$, выполняется автоматически.

Смещения поверхностных дефектов, то есть углы α_1 и α_2 , зависят как от расстояния d между частицей и дисклинацией, так и от ориентации частицы относительно особых линии дисклинации. Напомним, что под особыми линиями понимаются направления прямолинейных радиальных “линий тока” распределения $\mathbf{n}(\varphi_d)$ отдельной дисклинации [17]. При заданной фазе β особые линии ориентированы под углами $\varphi_d^k = (k\pi - \beta)/(m - 1)$ к оси дисклинации, здесь k – целое число. Независимыми являются $2|m - 1|$ линий. Эти линии, показанные на рис.2 штрихами, делят плоскость (r, φ) на такое же количество секторов, в которых частица ведет себя однотипно. Для дальнейшего анализа удобно выбрать изменение фазы β в интервале $[-\pi/2, \pi/2]$, что при $k = 0$ будет соответствовать изменению угла $\gamma = \beta/(1 - m)$ ориентации частицы в секторе $[-\pi/(2|m - 1|), \pi/(2|m - 1|)]$ с направлением особой линии $\gamma(\beta = 0) = 0$, см. рис.2.

В реальной системе заданной является фаза β (или величина γ), а углы α_1 и α_2 должны быть функциями от β . Следовательно, необходимо два условия, связывающие параметры α_1 , α_2 и β . Первое условие вытекает из соотношения (2) для фазы β ; оно оставляет независимыми два параметра, например, β и α_1 . Второе условие – это условие минимума функционала $F(\beta, \alpha_1)$ свободной энергии по α_1 , то есть $\partial F(\beta, \alpha_1)/\partial \alpha_1 = 0$ и $\partial^2 F(\beta, \alpha_1)/\partial \alpha_1^2 > 0$.

Найдем свободную энергию системы. Сначала определим функцию (2) однозначно; для этого проведем два разреза плоскости (r, φ) . Первый (внутренний) разрез – по поверхности частицы с обходом вокруг особых точек, отвечающих положению поверхностных дефектов. Второй (внешний) разрез – вдоль луча, уходящего от оси внешней дисклинации на бес-

конечность с замыканием разреза на бесконечности и на малой окружности, охватывающей ось (ядро) линейного дефекта. Тогда подстановка (2) в (1) дает $F = F_p + F_d + F_{\text{int}}(\beta, \alpha_1)$, где $F_p = \pi K L \ln(R/2\rho)$ и $F_d(m) = \pi K L m^2 \ln(D/\rho)$ – собственные энергии частицы [5] и внешней дисклинации [13], радиус ядер линейных дефектов $\rho \ll R$. Соотношение

$$F_{\text{int}}(\beta, \alpha_1) = \pi K L \{ m^2 \ln[d^2/(d^2 - R^2)] - (1/2) \ln[(1 - \cos(2\alpha_1 - 2\beta))/2] + m \ln[(R^2 + 2dR \cos \alpha_1 + d^2) \times (R^2 + 2dR \cos(2\beta - \alpha_1) + d^2)/d^4] \} \quad (3)$$

описывает промежуточный функционал энергии взаимодействия частицы с дисклинацией.

Минимизация функционала (3) по α_1 дает уравнение для функции $\alpha_1(\beta)$:

$$\frac{mdR \sin \alpha_1}{R^2 + 2dR \cos \alpha_1 + d^2} - \frac{mdR \sin(2\beta - \alpha_1)}{R^2 + 2dR \cos(2\beta - \alpha_1) + d^2} + \frac{\sin(2\alpha_1 - 2\beta)}{1 - \cos(2\alpha_1 - 2\beta)} = 0. \quad (4)$$

Решение этого уравнения, а также функция $\alpha_2(\beta) = 2\beta - \alpha_1(\beta)$ могут быть представлены в виде

$$\alpha_{1,2} = \beta \pm \arccos(\omega), \quad (5)$$

где $|\omega| \leq 1$ – отвечающий минимуму энергии действительный корень кубического уравнения

$$4R^2 d^2 (2m - 1) \omega^3 + 4Rd \cos \beta (R^2 + d^2) (m - 1) \omega^2 - [(d^2 - R^2)^2 + 4R^2 d^2 (2m + \cos^2 \beta)] \omega - 4mRd \cos \beta (R^2 + d^2) = 0. \quad (6)$$

К сожалению, при произвольном заряде m аналитические выражения для $\alpha_1(\beta)$ и $\alpha_2(\beta)$ являются слишком громоздкими и неудобными для анализа. Поэтому ниже мы рассмотрим несколько частных случаев, допускающих компактные решения, и покажем характер поведения частицы при произвольном m из анализа ее поведения на больших расстояниях от внешней дисклинации ($d \gg 4|m|R$) и вблизи особых линий последней ($\beta = 0$). При записи аналитических выражений перейдем от фазы β к естественной угловой координате γ ориентации частицы относительно особой линии ($k = 0, \beta = 0$) внешнего дефекта.

1. Дисклинация с зарядом $m = 1/2$. Характер перестройки системы дефектов, описывающих частицу, в зависимости от положения последней относительно особой линии внешней дисклинации показан на рис.3, где $d = 2.5R$, а углы α_1 и α_2 определяются

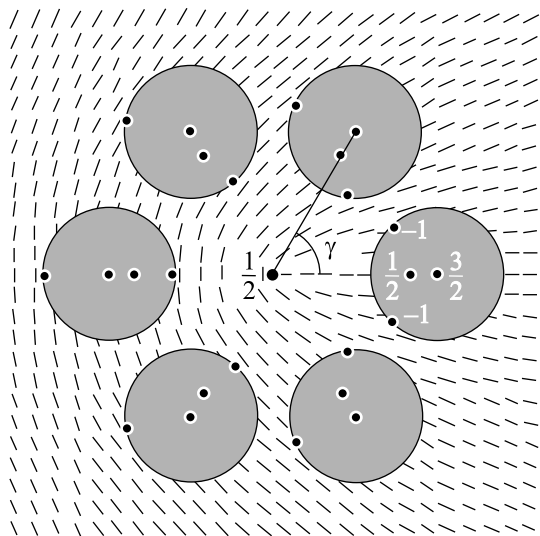


Рис.3. Положение дефектов частицы вблизи дисклинации с зарядом $m = 1/2$

выражением

$$\alpha_{1,2} = \gamma/2 \pm \{\pi - \arccos[2Rd \cos(\gamma/2)/(d^2 + R^2)]\}.$$

Энергия и сила $f_d = -\partial F_{\text{int}}/\partial d$ взаимодействия частицы и дисклинации не зависят от угла γ ориентации частицы:

$$\begin{aligned} F_{\text{int}} &= (3\pi KLR/4) \ln[(d^2 - R^2)/d^2], \\ f_d &= -3\pi KLR^2/[2d(d^2 - R^2)]. \end{aligned} \quad (7)$$

Поскольку сила $f_d < 0$, частица притягивается к внешнему линейному дефекту.

2. Дисклинация с зарядом $m = 1$. В реальных НЖК такая дисклинация может иметь только две фазы: $\beta = 0$ (источник) и $\beta = \pi/2$ (вихрь) [14, 17], а угловая координата γ ориентации частицы является произвольной. При $\beta = \pi/2$ поверхностные дефекты лежат на прямой, соединяющей оси частицы и дисклинации: $\alpha_1 = \pi$ и $\alpha_2 = 0$, а выражения для энергии и силы взаимодействия совпадают с (7) с точностью до дополнительного множителя (4/3). При $\beta = 0$ углы $\alpha_1 = -\alpha_2 = \arccos[(d^2 + R^2 - \sqrt{d^4 + 34d^2R^2 + R^4})/4dR]$; энергия и сила взаимодействия имеют более сложную зависимость от d по сравнению с (7), но принципиально поведение частицы не меняется, она притягивается к внешнему дефекту.

3. Дисклинация с зарядом $m < 0$ или $m > 1$. Поверхности энергии взаимодействия в координатах (d/R) и $(\varphi_d = k\pi/(m-1) + \gamma)$ с характерными для этого случая значениями заряда $m = 5/2$ и $m = -1/2$ представлены на рис.4; здесь стрелками показаны на-

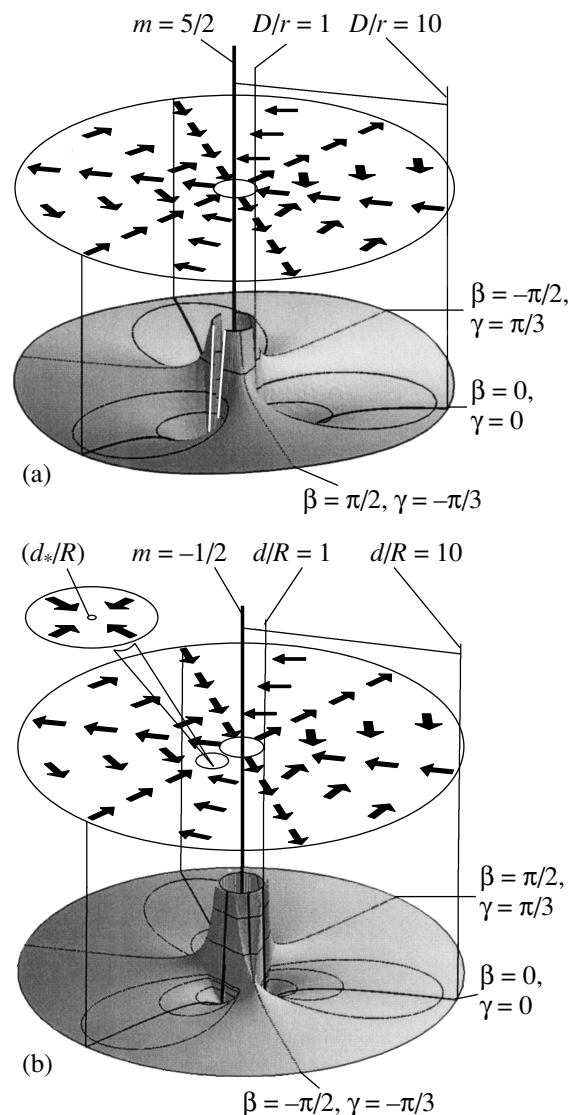


Рис.4. Характер энергии взаимодействия (поверхность) и направления силы (стрелки), действующей на частицу со стороны дисклинации с зарядом (а) $m = 5/2$, (б) $m = -1/2$

правления силы, действующей на частицу со стороны внешней дисклинации. Обсудим эти результаты, опираясь на анализ асимптотик соотношений (3)–(6).

При $d \gg 4|m|R$ из (3)–(6) получаем

$$\begin{aligned} \alpha_{1,2} &\approx (1-m)\gamma \pm \\ &\pm \{\pi/2 + 4mR \cos[(1-m)\gamma]/d\} \pm O(R^3/d^3), \\ F_{\text{int}} &\approx (\pi KLR^2/d^2)m\{m-2-4(2m-1) \times \\ &\times \cos^2[(1-m)\gamma]\} + O(R^4/d^4). \end{aligned} \quad (8)$$

Сила имеет как радиальную f_d , так и азимутальную $f_\gamma = -(1/d)(\partial F_{\text{int}}/\partial \gamma)$ компоненты:

$$f_d \approx (2\pi KLR^2/d^3)m\{m-2-4(2m-1)\cos^2[(1-m)\gamma]\},$$

$$f_\gamma \approx (4\pi KLR^2/d^3)m(m-1)(1-2m)\sin[2(1-m)\gamma].$$

Из этих выражений следует, что при $m < 0$ или $m > 1$ частица притягивается к особым линиям ($\gamma(\beta = 0) = 0$) дисклинации, где реализуется минимум энергии по переменной γ , а вдоль этих линий – к внешнему дефекту ($f_d(\gamma = 0) < 0$), см. рис.4. Вблизи среднего положения между особыми линиями, когда $\cos^2[(1-m)\gamma] < (m-2)/4(2m-1)$, и при значениях заряда $m < 0$ или $m > 2$ имеет место другой характер радиального поведения частицы: она отталкивается от внешнего дефекта ($f_d > 0$). Вместе с тем, за счет азимутальной составляющей силы взаимодействия частица смещается к особой линии, величина f_d меняет знак и частица притягивается к внешнему дефекту. Заметим, что при $m = 3/2$ или $m = 2$ радиальная компонента f_d отвечает притяжению при любых значениях γ , за исключением положений неустойчивого равновесия $\gamma = \pm\pi/2$ строго между особыми линиями дисклинации с $m = 2$.

В случае положительных значений заряда $1 < m < 4$ такой характер поведения частицы сохраняется при любых значениях d , то есть частица стремится “прилипнуть” к внешнему дефекту в направлениях особых линий последнего, см. рис.4а. Существенное отличие проявляется при взаимодействии частицы с дисклинацией, имеющей заряд $m < 0$ или $m \geq 4$. Это отличие можно понять из анализа поведения частицы вблизи особых линий внешнего дефекта.

При $\beta \ll 1$, то есть $\gamma \ll |1-m|^{-1}$, из соотношений (4)–(6) получаем

$$\alpha_{1,2} \approx \pm(A + B\gamma + C\gamma^2),$$

где

$$A = \arccos \left[\frac{1+t^2-s}{4t(2m-1)} \right], \quad B = 1-m,$$

$$s = [(1+t^2)^2 + 32mt^2(2m-1)]^{1/2}, \quad t = \frac{d}{R}.$$

Мы не приводим здесь достаточно громоздкого выражения для коэффициента $C = C(m, t)$, поскольку при разложении энергии взаимодействия (3) в том же порядке малости по γ множитель при этом коэффициенте, зависящий от A , тождественно равен нулю. В результате разложение F_{int} имеет вид

$$(F_{\text{int}}/\pi KL) \approx F_0 + F_2\gamma^2, \quad (9)$$

здесь

$$F_0 = m^2 \ln \left\{ \frac{t^2}{t^2-1} \right\} + m \ln \left\{ \frac{[(1-4m)(1+t^2)+s]^2}{4t^4(2m-1)^2} \right\} + \frac{1}{2} \ln \left\{ \frac{8t^2(2m-1)^2}{(s-t^2-16m+6)t^2+s-1} \right\},$$

$$F_2 = -\frac{2m(1-m)^2[(1+t^2)\cos A + 2t]}{(1+2t\cos A+t^2)^2}.$$

При $m < 0$ и $m > 1$ функция $F_2 > 0$ для всех рассматриваемых значений безразмерного расстояния t , поэтому минимуму энергии (9) по переменной γ отвечают положения частицы на особых линиях дисклинации ($\gamma = 0$). Вдоль этих линий энергия взаимодействия также имеет минимум, положение которого находится из уравнения $(\partial F_0/\partial t) = 0$; его решение дает

$$t_* = (d_*/R) = \sqrt{(m-2)(1-4m+2m^2)/(7m-2)}.$$

Величина t_* больше единицы при $m < 0$ или $m \geq 4$, то есть при этих значениях заряда внешней дисклинации частица стремится занять положение равновесия на ближайшей особой линии в точке d_* . На особой линии при $R \leq d < d_*$ частица отталкивается от дисклинации, а при $d > d_*$ притягивается к ней, см. рис.4б. Заметим, что для $m = 4, -1/2, -1$ значения d_* составляют соответственно $1.14R, 1.26R$ и $1.53R$, то есть положения равновесия частицы находятся в непосредственной близости от внешней дисклинации.

Отметим, что данные результаты, полученные для гомеотропного типа сцепления, можно обобщить на случай циркулярного сцепления, когда директор перпендикулярен оси цилиндрической частицы и касателен к ее боковой поверхности (для сферических частиц в мембранах смектика C аналогом циркулярного закрепления директора является тангенциальное сцепление [16]). При циркулярном (тангенциальном) сцеплении функция $\Phi(r, \varphi)$ отличается от (2) на дополнительную фазу ($\pm\pi/2$), что отвечает повороту особых линий дисклинации на угол $\gamma_c = \pm[\pi/2(1-m)]$. При таком повороте особых линий для рассмотренных выше случаев 1–3 различного заряда внешней дисклинации энергия и сила взаимодействия, а также положения линейных дефектов частицы трансформируются следующим образом. Для случая 1 с $m = 1/2$ положения дефектов частицы, показанные на рис.3, сохраняются, если повернуть направление особой линии на угол ($\pm\pi$), при этом энергия и сила взаимодействия (7) не изменяются. Для случая 2 с $m = 1$ описанные выше ситуации с фазами $\beta = 0$ и $\beta = \pi/2$ взаимно трансформируются одна в другую. В случае 3 при $m < 0$ или

$m > 1$ поворот особых линий на угол γ_c , см. рис.4, где $\gamma_c = \pm\pi/3$, приводит к азимутальному смещению всех силовых и энергетических характеристик на такой же угол. В результате, при циркулярном (тангенциальном) сцеплении частица притягивается к направлениям, лежащим строго между особыми линиями внешней дисклинации, а ее радиальное поведение сохраняется при соответствующем угловом смещении γ_c .

Подводя итог, оценим максимальное (эффективное) расстояние d_{ef} , на котором в реальных суспензиях взаимодействие частиц с дисклинационной линией является существенным. Для наблюдаемых в НЖК дисклинационных линий с $m = \pm 1/2$ из соотношений (7) и (8) получаем, что при $d \gg 2R$ энергия $F_{int} \sim \pi KLR^2/d^2$. Взаимодействие должно иметь место, когда эта величина по крайней мере на порядок выше тепловой энергии $F_T = k_B T \sim 4 \cdot 10^{-14}$ эрг. Для реальных суспензий [2] с модулем упругости $K \sim (3 \div 5) \cdot 10^{-7}$ дин (МВВА) и частицами длиной $L \sim 0.5$ мкм и радиусом $R \sim L/14$ получаем оценку $d_{ef} \sim (\pi KLR^2/10k_B T)^{1/2} \approx (0.4 \div 0.5)$ мкм, то есть эффективное расстояние d_{ef} порядка длины L частицы. Заметим, что среднее расстояние между частицами в суспензии также порядка L [5], поэтому описанный выше эффект взаимодействия частиц с дисклинационными линиями может привести к перераспределению твердой фазы в суспензии.

-
1. F. Li, O. Buchnev, C. Cheon et al., Phys. Rev. Lett. **97**, 147801 (2006).
 2. S.-H. Chen and N.M. Amer, Phys. Rev. Lett. **51**, 2298 (1983).

3. O. Buluy, E. Ouskova, Yu. Reznikov et al., Ukr. J. Phys. **49**, A48 (2004); P. Kopčanský, I. Potočová, M. Koneracká et al., J. Magn. Magn. Mater. **289**, 101 (2005).
4. S. V. Burylov and Yu. L. Raikher, Mol. Cryst. Liq. Cryst. **258**, 107, 123 (1995).
5. F. Brochard and P. G. de Gennes, J. Phys.(France) **31**, 691 (1970).
6. S. V. Burylov and Yu. L. Raikher, Phys. Rev. E **50**, 358 (1994).
7. B. I. Lev and P. M. Tomchuk, Phys. Rev. E **59**, 591 (1999).
8. T. C. Lubensky, D. Pettey, N. Currier et al., Phys. Rev. E **57**, 610 (1998).
9. D. L. Cheung and M. P. Allen, Phys. Rev. E **74**, 021701 (2006).
10. R. W. Ruhwandl and E. M. Terentjev, Phys. Rev. E **55**, 2958 (1997); P. Poulin and D. A. Weitz, Ibid. **57**, 626 (1998).
11. D. Andrienko, M. Tasinkevych, P. Patricio et al., Phys. Rev. E **68**, 051720 (2003).
12. I. I. Smalyukh, B. I. Senyuk, S. V. Shiyanovskii et al., Mol. Cryst. Liq. Cryst. **450**, 79/[279] (2006); S. Grollau, N. Abbott, and J. J. de Pablo, Phys. Rev. E **67**, 051703 (2003).
13. P. G. de Gennes and J. Prost, *The Physics of Liquid Crystal*, Clarendon Press, Oxford, 1993.
14. С. В. Бурылов, ЖЭТФ **112**, 1603 (1997).
15. D. W. Allender, G. P. Crawford, and J. W. Doane, Phys. Rev. Lett. **67**, 1442 (1991).
16. D. Pettey, P. Lubensky, and D. Link, Liq. Cryst. **25**, 597 (1998); P. V. Dolganov and V. K. Dolganov, Phys. Rev. E **73**, 041706 (2006); P. V. Dolganov, H. T. Nguyen, E. I. Kats et al., Ibid. **75**, 031706 (2007).
17. И. Е. Дзялошинский, ЖЭТФ **58**, 1443 (1970).