

# Магнитовращательная неустойчивость в неоднородном магнитном поле

В. И. Ильгисонис<sup>+1)</sup>, И. В. Хальзов<sup>+\*1)2)</sup>

<sup>+</sup> Российский научный центр “Курчатовский институт”, 123182 Москва, Россия

\* Университет Саскачевана, Саскатун S7N5E2, Канада

Поступила в редакцию 25 октября 2007 г.

Показано, что характеристики магнитовращательной неустойчивости заметно меняются в присутствии неоднородности магнитного поля, в котором происходит вращение. Характерный для астрофизических объектов спад магнитного поля с ростом расстояния от центра вращения может приводить к значительному снижению пороговой скорости вращения вещества объекта, а также смягчению требований на профиль скорости вращения, необходимых для развития неустойчивости. Построены примеры, демонстрирующие указанный эффект.

PACS: 52.35.Py, 95.30.Qd

С начала 1990-х годов [1] предсказанная Велиховым [2] магнитовращательная или, как ее иногда называют, следуя английской терминологии, магнито-ротационная (вращательная) неустойчивость (МВН) является предметом пристального внимания астрофизиков как возможный механизм возникновения турбулентности в аккреционных дисках. При типичном для таких объектов кеплеровском профиле вращения с угловой частотой  $\Omega \sim r^{-3/2}$ , где  $r$  – текущий радиус вращения, обычные гидродинамические моды, как правило, стабилизированы, тогда как развитие МВН возможно. В простейшей модельной постановке МВН проявляется как неустойчивость вращения хорошо проводящей жидкости со скоростью  $\mathbf{V} = r\Omega(r)\mathbf{e}_\phi$  в аксиальном магнитном поле  $\mathbf{B} = B\mathbf{e}_z$  (мы будем работать в цилиндрической системе координат  $r, \phi, z$  с единичными ортами  $\mathbf{e}_r = \nabla r$ ,  $\mathbf{e}_\phi = r\nabla\phi$ ,  $\mathbf{e}_z = \nabla z$ ), где  $B = \text{const}$ .

В последнее время активизировались попытки наблюдения МВН в условиях лабораторного эксперимента с жидким металлом. В этих экспериментах исследуется либо замагниченное течение Тэйлора-Куэтта [3–5], либо предполагается раскрутка вращения силой Ампера [6–8]. Определенная трудность, свойственная этим экспериментам, состоит в том, что МВН развивается при довольно высоких скоростях вращения  $\Omega r \gtrsim c_A$ , где  $c_A$  – характерная альфвеновская скорость, составляющая для большинства установок величину порядка нескольких километров в секунду. При таких скоростях вращения возможна

деградация и существенная двумеризация поля скоростей (в частности, расширение пристеночных вихревых образований) [9], что затрудняет проявление и идентификацию МВН. Недавно было продемонстрировано снижение порога МВН при наложении тороидального магнитного поля [10], однако позднее было показано [11], что возникающая при этом неустойчивость имеет другую физическую природу и носит чисто резистивный характер.

С другой стороны, хорошо известно, что в неоднородном магнитном поле магнитогиродинамическое (МГД) течение может быть более неустойчивым, чем в однородном [12, 13]. Детальный анализ такой магнитопотоковой неустойчивости, возникающей при плоском одномерном течении без каких-либо точек перегиба в неоднородном симметричном магнитном поле, был недавно проделан в [14]. Существенно, что для рассмотренного в [14] линейного профиля скорости такая неустойчивость носит, по сути, кинематический характер, модифицируя неустойчивость Кельвина-Гельмгольца в обычной гидродинамике. В данной работе рассматривается осесимметричное неоднородное вращение идеально проводящей жидкости в условиях неоднородного по радиусу магнитного поля. Существенно, что источник неустойчивости, как и в классической МВН, связан с центробежной силой, тогда как характер (собственные функции) и порог неустойчивости заметно меняются. В соответствии с вышесказанным эта неустойчивость может быть названа магнитной потоково-вращательной неустойчивостью (МПВН). Интерес к этому явлению в значительной степени связан с возможностью более легкого обнаружения МПВН в лабо-

<sup>1)</sup> e-mail: vil@nfi.kiae.ru, halzovi@mail.ru

<sup>2)</sup> I. V. Khalzov.

раторном эксперименте, нежели классической МВН, а также с очевидно присутствующей неоднородностью магнитного поля во вращающихся астрофизических объектах, где развитие МПВН также представляется более вероятным.

Рассмотрим появление МПВН в вышеописанной модельной постановке, считая теперь, что величина магнитного поля может зависеть от радиуса,  $B = B(r)$ . Математической моделью для описания МПВН может служить система уравнений идеальной МГД:

$$\begin{aligned} \rho(\partial_t \mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}) + \nabla p &= \frac{1}{4\pi} \text{rot } \mathbf{B} \times \mathbf{B}, \\ \partial_t \mathbf{B} &= \text{rot} [\mathbf{v} \times \mathbf{B}], \\ \text{div } \mathbf{B} &= 0, \\ \text{div } \mathbf{v} &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь все обозначения стандартны:  $\rho$  и  $p$  – соответственно плотность и давление идеально проводящей среды, движущейся в магнитном поле  $\mathbf{B}$  с массовой скоростью  $\mathbf{v}$ . Как и в исходной постановке задачи о МВН [2], движение предполагается несжимаемым с постоянной плотностью ( $\rho(t, \mathbf{r}) = \text{const}$ ), а стартовое стационарное состояние – осесимметричным ( $\partial/\partial\phi = 0$ ).

В этом стационарном состоянии выполняется баланс сил в виде

$$-\rho r \Omega^2 + (p + B^2/8\pi)' = 0, \quad (2)$$

где  $\Omega = v_\phi/r$ , штрих обозначает производную  $\partial/\partial r$ . При строго вертикальном направлении магнитного поля неоднородность  $B(r) \neq \text{const}$  отвечает появлению азимутального тока с плотностью

$$\mathbf{j} = \frac{c}{4\pi} \text{rot } \mathbf{B} = -\frac{c}{4\pi} B' \mathbf{e}_\phi.$$

При этом следует указать, что рассматриваемая нами неустойчивость не связана с токовым характером стационарного состояния наподобие винтовой моды. Мы увидим, что структура этой моды иная, к тому же величина неоднородной составляющей магнитного поля может быть крайне невелика. Кроме того, исходная неоднородность может быть создана внешним источником, например, магнитным диполем в центре вращающегося аккреционного диска в отсутствие тока в самом диске. При малой толщине диска по отношению к радиусу поле такого источника будет практически однонаправленным. Размеры области вращения могут быть ограничены по вертикали толщиной аккреционного диска или – в эксперименте – высотой канала  $h$ ,  $|z| \leq h$ . В эксперименте

также ограничены радиальные размеры устройства:  $r \in [r_1, r_2]$ .

Интересуясь линейной стадией развития неустойчивости, линеаризуем систему вблизи положения равновесия (2), предполагая характер возмущенных величин в виде

$$f(t, r, \phi, z) = f(r) e^{ikz - i\omega t}. \quad (3)$$

Тем самым, следуя [2], мы ограничиваемся рассмотрением лишь осесимметричных мод. С учетом (3) возмущение магнитного поля представляется как

$$\tilde{\mathbf{B}} = -(\mathbf{k} \cdot \mathbf{B}) \frac{\mathbf{v}}{\omega} - i \frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{B}}{\omega} r \Omega' \mathbf{e}_\phi \frac{v_r}{\omega} - i \frac{v_r}{\omega} B' \mathbf{e}_z. \quad (4)$$

Здесь и ниже мы используем букву  $v$  для обозначения компонент возмущенной скорости, выражая скорость стационарного вращения через  $\Omega$ . Линеаризованное уравнение движения в (1) записывается в виде

$$\begin{aligned} \rho \left( -i\omega \mathbf{v} - 2\Omega v_\phi \mathbf{e}_r + \frac{(r^2 \Omega)'}{r} v_r \mathbf{e}_\phi \right) + \\ + \nabla P = \frac{(\mathbf{k} \cdot \mathbf{B})^2}{4\pi\omega} \left( -i\mathbf{v} + \frac{v_r}{\omega} r \Omega' \mathbf{e}_\phi \right), \end{aligned} \quad (5)$$

где  $P$  – возмущение полного давления  $p + B^2/8\pi$ . Исключая  $v_z$  из условия несжимаемости,  $v_z = i(rv_r)'/kr$ , и далее, последовательно исключая  $v_\phi$  и  $P$  из (5), приходим к скалярному уравнению

$$\begin{aligned} \left( \frac{\omega^2 - \omega_A^2}{r} \left( r \frac{v_r}{\omega} \right)' \right)' = \\ = k^2 \frac{v_r}{\omega} \left( \omega^2 - \omega_A^2 - 2r\Omega\Omega' - \frac{4\omega^2 \Omega^2}{\omega^2 - \omega_A^2} \right), \end{aligned} \quad (6)$$

которое внешне выглядит в точности так же, как и в случае обычной МВН. Единственное отличие состоит в том, что величина  $\omega_A^2 = (\mathbf{k} \cdot \mathbf{B})^2/4\pi\rho$  в нашем случае зависит от  $r$  и не может быть просто вынесена из-под производной. Два последних члена в правой части (6) ответственны за появление вращательной неустойчивости, описывая центробежный и кориолисов эффекты. В отсутствие этих членов уравнение (6) описывало бы магнитопотоковую неустойчивость в цилиндрической геометрии, вполне аналогичную рассмотренной в [14]. Следует отметить, что, как следует из (6), механизм МПВН принципиально отличен и от паркерской неустойчивости [15], проявляющейся в неоднородном магнитном поле в случае сжимаемой среды, когда вызывающая неустойчивость сила существенно зависит от возмущения плотности (как, например, в случае силы гравитации).

Уравнение (6), дополненное естественными граничными условиями, может быть решено численно

относительно частот и собственных функций  $v_r$  (как нетрудно заметить, отношение  $v_r/\omega$  пропорционально радиальному смещению среды). Качественно же возможная дестабилизирующая роль неоднородности магнитного поля может быть выявлена уже из следующего простого анализа.

Введем  $x, u$ :

$$x = r^2, \quad \frac{rv_r}{\omega} = u\sqrt{\omega^2 - \omega_A^2}. \quad (7)$$

С использованием (7) уравнение (6) переписывается в виде

$$\begin{aligned} & \left( (\omega^2 - \omega_A^2)^2 u' \right)' + \\ & + u \left[ \omega_A^2 \omega_A'^2 - (\omega_A \omega_A'' + \omega_A'^2)(\omega^2 - \omega_A^2) + \right. \\ & \left. + \frac{k^2}{x} \left( \omega^2 \Omega^2 + x \Omega \Omega' (\omega^2 - \omega_A^2) - \frac{1}{4} (\omega^2 - \omega_A^2)^2 \right) \right] = 0. \quad (8) \end{aligned}$$

Здесь и ниже с учетом введенной вместо  $r$  переменной  $x$  штрихом обозначается производная по  $x$ :  $(\dots)' = (2r)^{-1} d(\dots)/dr$ .

Домножая на комплексно-сопряженную зависящую функцию  $u^*$  и интегрируя по области, занятой вращающейся средой, получаем биквадратное дисперсионное уравнение

$$A_4 \omega^4 + A_2 \omega^2 + A_0 = 0, \quad (9)$$

в котором

$$\begin{aligned} A_4 &= \int \left( |u'|^2 + \frac{k^2 |u|^2}{4x} \right) dx, \\ A_2 &= \int \left( -2\omega_A^2 |u'|^2 + |u|^2 \left( \omega_A \omega_A'' + \omega_A'^2 - \frac{k^2 \omega_A^2}{2x} - \frac{k^2}{x} (\Omega^2 + x \Omega \Omega') \right) \right) dx, \\ A_0 &= \int \left( \omega_A^4 |u'|^2 - |u|^2 \omega_A^2 \left( \omega_A \omega_A'' + 2\omega_A'^2 - \frac{k^2}{x} \left( \frac{\omega_A^2}{4} + x \Omega \Omega' \right) \right) \right) dx. \end{aligned}$$

При выводе этих коэффициентов мы использовали естественные граничные условия обращения функции  $u$  в нуль на границе области интегрирования. В силу неотрицательности  $A_4 \geq 0$  неустойчивость (при существовании собственных функций, удовлетворяющих (8)) гарантированно (при любом значении величины  $A_2$ ) возникает, если

$$A_0 < 0. \quad (10)$$

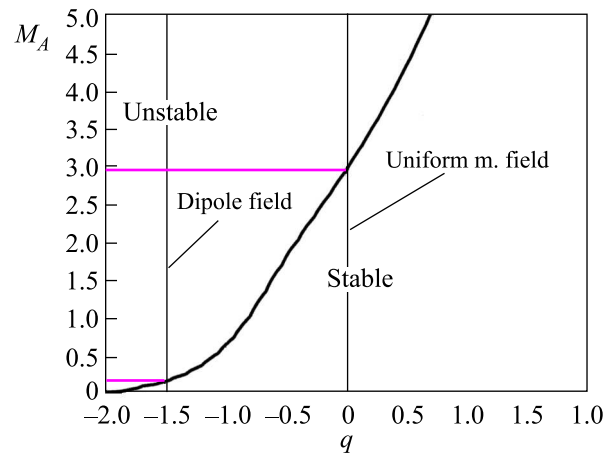
Нетрудно видеть, что неоднородность магнитного поля облегчает возникновение неустойчивости в случае, когда

$$(\omega_A^3)''_{xx} > 0. \quad (11)$$

В частности, для степенного профиля  $B \sim x^q$  условие (11) выполняется для любого спадающего с радиусом магнитного поля ( $q < 0$ ), а также для растущего с  $q > 1/3$ .

Вышеприведенные качественные соображения были верифицированы численными расчетами собственных значений и собственных функций уравнения (8) для вращающегося кольцевого объекта,  $r \in [r_1, r_2]$ ,  $z \in [-h, h]$ ,  $h/|r_1 - r_2| = 0.25$ , геометрия которого и алгоритм расчетов по методу стрельбы подробно описаны в [16]. Значение волнового числа  $k$  выбиралось из условия минимизации порога неустойчивости, что, как правило, соответствовало значению  $k \approx \pi/2h$ . Для угловой скорости вращения предполагалась зависимость  $\Omega \sim r^{-2}$ .

На рисунке представлена пороговая кривая, изображающая минимальные значения магнитного чис-



Порог МПВН на плоскости "Показатель  $q$  - магнитное число Маха  $M_A$ "

ла Маха,  $M_A = r\Omega k/\omega_A \Big|_{r=r_1}$ , вызывающие неустойчивость, в зависимости от значения параметра  $q$ . Область параметров, лежащая выше кривой, отвечает неустойчивости, а ниже кривой - устойчивости. Как видно, при переходе от случая однородного магнитного поля ( $q = 0$ ) к случаю дипольного поля ( $q = -1, 5$ ) пороговое значение  $M_A$  снижается на порядок. Тем самым ожидаемый эффект облегченной генерации МПВН по сравнению с классической МВН оказывается весьма значительным.

Работа поддержана грантом Российского фонда фундаментальных исследований # 07-02-00441 и

грантом # 101 Фонда “Научный потенциал”, Советом по естественным наукам и инженерным исследованиям Канады (Natural Sciences and Engineering Research Council of Canada), а также РНЦ “Курчатовский институт” в рамках поддержки инициативных проектов в области фундаментальных исследований.

1. S. A. Balbus and J. F. Hawley, *Astrophys. J.* **376**, 214 (1991).
2. E. P. Velikhov, *Sov. Phys. JETP* **36**, 995 (1959).
3. D. R. Sisan, N. Mujica, W. A. Tillotson et al., *Phys. Rev. Lett.* **93** 114502 (2004).
4. H. Ji, J. Goodman, and A. Kageyama, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **325**, L1 (2001).
5. K. Noguchi, V. I. Pariev, S. A. Colgate et al., *Astrophys. J.* **575** 1151 (2002).
6. K. Noguchi and V. Pariev, *AIP Conference Proceedings* **692**, 285 (2003).
7. E. P. Velikhov, A. A. Ivanov, S. V. Zakharov et al., *Phys. Lett. A* **358**, 216 (2006).
8. В. С. Федотовский, Н. И. Логинов, А. С. Михеев и др., В сб. *Пути ученого Е.П. Велихов*, Под ред. акад. В.П. Смирнова, М.: РНЦ “Курчатовский институт”, 2007, с. 167.
9. И. В. Хальзов, А. И. Смоляков, *ЖТФ* **76**, 28 (2006).
10. R. Hollerbach and G. Rüdiger, *Phys. Rev. Lett.* **95**, 124501 (2005).
11. V. P. Lakhin and E. P. Velikhov, *Physics Lett. A* **369**, 98 (2007).
12. M. E. Stern, *Phys. Fluids* **6**, 636 (1963).
13. A. Kent, *Phys. Fluids* **9**, 1286 (1966); *J. Plasma Phys.* **2**, 543 (1968).
14. T. Tatsuno and W. Dorland, *Phys. Plasmas* **13**, 092107 (2006).
15. E. N. Parker, *Astrophys. Journ*, **145**, 811 (1966).
16. V. I. Ilgisonis, I. V. Khalzov, A. I. Smolyakov, and E. P. Velikhov, *Phys. Fluids*, **18**, 124107 (2006).