Письма в ЖЭТФ, том 86, вып. 12, с. 873 – 878

Кинетическое описание экранирования заряда макрочастиц в неравновесной плазме

А. В. Филиппов[1)], *А. Г. Загородний*[+], *А. Ф. Паль, А. Н. Старостин, А. И. Момот*[*]

ГНЦ РФ Троицкий институт инновационных и термоядерных исследований
142190 Троицк, Московская обл., Россия

[+]*Институт теоретической физики им. Н.Н. Боголюбова НАН Украины*
03680 Киев, Украина

[*]*Киевский национальный университет им. Тараса Шевченко, 01033 Киев, Украина*

Поступила в редакцию 31 октября 2007 г.

Развит новый подход к кинетическому описанию экранирования заряда макрочастиц и определения распределения эффективного потенциала в неравновесной плазме. Главная идея нового подхода состоит в учете поглощения электронов и ионов макрочастицей путем введения эффективных точечных стоков в кинетические уравнения, описывающие динамику частиц плазмы. На основе предложенного подхода определены явные соотношения для эффективного потенциала с учетом столкновений электронов и ионов с нейтральными частицами буферного газа, а также в присутствии внешнего магнитного поля.

PACS: 52.27.Lw, 57.70.–m

1. Введение. Теоретическое исследование взаимодействия макрочастиц в плазме все еще остается одним из самых важных вопросов в физике пылевой плазмы. Ввиду того, что пылевые или макрочастицы в плазме приобретают большие заряды, эффективные потенциалы пылинок обычно исследуют на основе либо численного решения соответствующих нелинейных краевых задач, либо моделирования методами молекулярной динамики. В результате таких исследований многие характерные свойства эффективного потенциала пылевых частиц уже установлены (см., например, работы [1 – 12] и цитированную в них литературу). Тем не менее, для описания многих интересных явлений в экспериментах по исследованию пылевой плазмы, таких как формирование пылевых кристаллов, распространение пылеакустических волн, возникновение нелинейных плазменно-пылевых структур и т.д., необходимы аналитические соотношения для эффективного потенциала.

Целью настоящей работы является разработка кинетического подхода для описания эффективного потенциала макрочастиц с учетом столкновений электронов и ионов с частицами нейтрального газа и с учетом влияния внешнего магнитного поля. Основная идея такого описания заключается в замене краевой задачи для потенциала с граничным условием, описывающим поглощение плазменных частиц поверхностью макрочастицы на эквивалентную задачу без такого граничного условия, но с соответствующим сингулярным стоком в кинетических уравнениях для электронов и ионов. Эта идея была предложена в работах [13, 14] и успешно использовалась для описания эффективного потенциала как в бесстолкновительной плазме, так и в плазме с частыми столкновениями в рамках дрейфово-диффузионного приближения. В настоящей работе этот подход использован для описания пылевой плазмы с произвольной частотой столкновений плазменных частиц на основе кинетического уравнения Бхатнагара–Гросса–Крука. Основные уравнения предложенного подхода сформулированы в первом разделе работы. Во втором разделе получено общее решение поставленной задачи, а в третьем разделе проводится анализ стационарных эффективных потенциалов для ряда частных случаев.

1. Основные уравнения. Будем рассматривать макрочастицу радиуса a, находящуюся в столкновительной плазме. Полагаем, что частица поглощает все падающие на нее электроны и ионы, а процессами эмиссии электронов можно пренебречь. Столкновения плазменных частиц (электронов и ионов) с нейтральными атомами будем описывать на основе простой модели Бхатнагара–Гросса–Крука (БГК) [15]. В этом приближении функция распределения (ФР) частиц плазмы $f_\sigma(X,t)$ (индекс σ обозначает сорт плазменных частиц; $X \equiv (\mathbf{r}, \mathbf{v})$) удовлетворяет следующему кинетическому уравнению

[1)] e-mail: fav@triniti.ru

$$\left\{\frac{\partial}{\partial t}+\mathbf{v}\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}+\frac{e_\sigma}{m_\sigma}\mathbf{E}(\mathbf{r},t)\frac{\partial}{\partial \mathbf{v}}+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{m_\sigma}\mathbf{F}_\sigma^{\mathrm{ext}}(X,t)\frac{\partial}{\partial \mathbf{v}}\right\}f_\sigma(X,t)=$$
$$=-\nu_\sigma\left\{f_\sigma(X,t)-\Phi_\sigma(\mathbf{v})\int d\mathbf{v}\,f_\sigma(X,t)\right\}, \qquad (1)$$

где $\mathbf{F}_\sigma^{\mathrm{ext}}(X,t)$ – внешние силы, $\Phi_\sigma(\mathbf{v})$ – функция распределения, возникающая в результате столкновений с нейтральными атомами; другие обозначения общеприняты. Уравнение (1) следует дополнить следующим граничным условием

$$f_\sigma(X,t)\big|_{r=a,v_r>0}=0, \qquad (2)$$

которое описывает поглощение частиц плазмы макрочастицей и отсутствие каких-либо процессов эмиссии электронов. Здесь v_r – проекция скорости плазменных частиц на радиальную ось сферической системы координат с началом в центре макрочастицы.

Мы предлагаем исследовать эффективный потенциал на основе *модели точечного стока*. В этой модели полагается, что эффекты, связанные с поглощением плазменных частиц пылинкой, можно приближенно описать с помощью эффективных сингулярных стоков, то есть вместо уравнения (1) с граничным условием (2) мы предлагаем использовать уравнение

$$\left\{\frac{\partial}{\partial t}+\mathbf{v}\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}+\frac{e_\sigma}{m_\sigma}\mathbf{E}\frac{\partial}{\partial \mathbf{v}}+\frac{1}{m_\sigma}\mathbf{F}_\sigma^{\mathrm{ext}}\frac{\partial}{\partial \mathbf{v}}\right\}f_\sigma(X,t)=$$
$$=-\nu_\sigma\left[f_\sigma(X,t)-\Phi_\sigma(\mathbf{v})\int d\mathbf{v}\,f_\sigma(X,t)\right]-$$
$$-S_\sigma(\mathbf{v},t)\delta(\mathbf{r}), \qquad (3)$$

где $S_\sigma(\mathbf{v},t)$ – интенсивность точечного стока, которая полагается фукционалом от функции распределения $f_\sigma(X,t)$, то есть

$$S_\sigma(\mathbf{v},t)\equiv S_\sigma\Big(\mathbf{v},t;\{f_\sigma(X,t)\}\Big). \qquad (4)$$

Эти величины удобно выразить через сечения зарядки. Например, в случае изотропной плазмы или в случае частых столкновений эти соотношения можно написать как

$$S_\sigma(\mathbf{v},t)=v\sigma_\sigma\big(q(t),v\big)f_\sigma(X,t), \qquad (5)$$

где $\sigma_\sigma(q,v)$ – сечение зарядки, которое зависит от свойств окружающей плазмы.

Ввиду того, что поглощение плазменных частиц значительно уменьшает эффекты нелинейности [1–4, 13, 14], предположим, что присутствие стоков вызовет малые возмущения эффективного электрического поля, поэтому можно использовать линеаризованную версию уравнения (3). Однако в этих уравнениях следует использовать сечения зарядки, рассчитанные без использования теории возмущений. Таким образом, для линейной поправки к невозмущенным функциям распределения имеем

$$\left\{\frac{\partial}{\partial t}+\mathbf{v}\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}+\frac{1}{m_\sigma}\mathbf{F}_\sigma^{\mathrm{ext}}\frac{\partial}{\partial \mathbf{v}}\right\}\delta f_\sigma(X,t)-$$
$$-\frac{e_\sigma}{m_\sigma}\nabla\phi(\mathbf{r},t)\frac{\partial f_{0\sigma}(\mathbf{v})}{\partial \mathbf{v}}=-S_\sigma^{(0)}(\mathbf{v},t)\delta(\mathbf{r})-$$
$$-\nu_\sigma\left[\delta f_\sigma(X,t)-\Phi_\sigma(\mathbf{v})\int d\mathbf{v}\delta f_\sigma(X,t)\right], \qquad (6)$$

где

$$S_\sigma^{(0)}(\mathbf{v},t)=S_\sigma\Big(\mathbf{v},t;\{f_{0\sigma}(\mathbf{v})\}\Big),$$

или, в случае представления (5),

$$S_\sigma^{(0)}(\mathbf{v},t)=v\sigma_\sigma(q(t),v)f_{0\sigma}(\mathbf{v}).$$

Потенциал самосогласованного поля $\phi(\mathbf{r},t)$ определяется уравнением Пуассона

$$\Delta\phi(\mathbf{r},t)=-4\pi q(t)\delta(\mathbf{r})-$$
$$-4\pi\sum_\sigma e_\sigma n_\sigma\int d\mathbf{v}\delta f_\sigma(X,t). \qquad (7)$$

2. Эффективный потенциал заряженной макрочастицы (общее решение). Решение уравнения (6) можно представить в виде

$$\delta f_\sigma(X,t)=\frac{e_\sigma}{m_\sigma}\int\limits_{-\infty}^{t}dt'\int dX'W_\sigma(X,X';t-t')\times$$
$$\times\frac{\partial\phi(\mathbf{r}',t')}{\partial \mathbf{r}'}\frac{\partial f_{0\sigma}(\mathbf{v}')}{\partial \mathbf{v}'}-$$
$$-\int\limits_{-\infty}^{t}dt'\int dX'W_\sigma(X,X';t-t')S_\sigma^{(0)}(\mathbf{v}',t')\delta(\mathbf{r}'), \qquad (8)$$

где $W_\sigma(X,X';\tau)$ – вероятность перехода частицы из точки $X'\equiv(\mathbf{r}',\mathbf{v}')$ в точку $X\equiv(\mathbf{r},\mathbf{v})$ в течение временного интервала $\tau=t-t'$ в системе с "выключенным" самосогласованным электромагнитным взаимодействием. Эта величина удовлетворяет уравнению

$$\left\{\frac{\partial}{\partial t}+\mathbf{v}\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}+\frac{1}{m_\sigma}\mathbf{F}_\sigma^{\mathrm{ext}}\frac{\partial}{\partial \mathbf{v}}\right\}W_\sigma(X,X';\tau)=$$
$$=-\nu_\sigma\Big[W_\sigma(X,X';\tau)-\Phi_\sigma(\mathbf{v})\times$$
$$\times\int d\mathbf{v}W_\sigma(X,X';\tau)\Big] \qquad (9)$$

с начальным условием

$$W_\sigma(X, X'; 0) = \delta(X - X'). \tag{10}$$

Подставив (8) в уравнение Пуассона (7), получим следующее решение для эффективного потенциала в $(\mathbf{k}, \omega)$-представлении:

$$\phi_{\mathbf{k}\omega} = \frac{4\pi q_\omega}{k^2\varepsilon(\mathbf{k},\omega)} - \frac{4\pi}{k^2\varepsilon(\mathbf{k},\omega)} \times \\ \times \sum_\sigma e_\sigma n_\sigma \int d\mathbf{v} \int d\mathbf{v}' W_{\sigma\mathbf{k}\omega}(\mathbf{v},\mathbf{v}') S^{(0)}_{\sigma\omega}(\mathbf{v}'), \tag{11}$$

где $\varepsilon(\mathbf{k}, \omega)$ – функция диэлектрического отклика:

$$\varepsilon(\mathbf{k},\omega) = 1 - i\sum_\sigma \frac{4\pi e_\sigma^2 n_\sigma}{k^2 m_\sigma} \times \\ \times \int d\mathbf{v} \int d\mathbf{v}' W_{\sigma\mathbf{k}\omega}(\mathbf{v},\mathbf{v}') \mathbf{k} \frac{\partial f_{0\sigma}(\mathbf{v}')}{\partial \mathbf{v}'}; \tag{12}$$

$$W_{\sigma\mathbf{k}\omega}(\mathbf{v},\mathbf{v}') = \\ = \int d\mathbf{R} e^{-i\mathbf{k}\mathbf{R}} \int_0^\infty d\tau e^{i\omega\tau} W_\sigma(X, X', \tau), \tag{13}$$

$$\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'.$$

В стационарном состоянии

$$q(t) = q, \qquad S^{(0)}_\sigma(\mathbf{v}, t) = S^{(0)}_\sigma(\mathbf{v}),$$

и уравнение (11) переходит в следующее:

$$\phi_{\mathbf{k}} = \frac{4\pi q}{k^2\varepsilon(\mathbf{k},0)} - \frac{4\pi}{k^2\varepsilon(\mathbf{k},0)} \times \\ \times \sum_\sigma e_\sigma n_\sigma \int d\mathbf{v} \int d\mathbf{v}' W_{\sigma\mathbf{k}}(\mathbf{v},\mathbf{v}') S^{(0)}_\sigma(\mathbf{v}'). \tag{14}$$

Здесь

$$W_{\sigma\mathbf{k}}(\mathbf{v},\mathbf{v}') = W_{\sigma\mathbf{k}\omega}(\mathbf{v},\mathbf{v}')\big|_{\omega=0}, \tag{15}$$

$$\varepsilon(\mathbf{k},0) = 1 + \frac{k_D^2}{k^2}, \tag{16}$$

$$k_D^2 = \sum_\sigma k_\sigma^2, \qquad k_\sigma^2 = \frac{4\pi e_\sigma^2 n_\sigma}{T_\sigma}. \tag{17}$$

В случае движущейся макрочастицы аргумент $\mathbf{r}$ δ-функции в (6), (7) должен быть заменен на $(\mathbf{r} - \mathbf{v}_0 t)$ (где $\mathbf{v}_0$ – скорость макрочастицы). Следовательно, решение для экранированного потенциала движущейся макрочастицы будет иметь вид

$$\phi_{\mathbf{k}\omega} = \frac{8\pi^2 q\delta(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}_0)}{k^2\varepsilon(\mathbf{k},\mathbf{k}\mathbf{v}_0)} - \frac{8\pi^2\delta(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}_0)}{k^2\varepsilon(\mathbf{k},\mathbf{k}\mathbf{v}_0)} \times \\ \times \sum_\sigma e_\sigma n_\sigma \int d\mathbf{v} \int d\mathbf{v}' W_{\sigma\mathbf{k},\mathbf{k}\mathbf{v}_0}(\mathbf{v},\mathbf{v}') S^{(0)}_\sigma(\mathbf{v}'). \tag{18}$$

Используя (8), легко вычислить электрический ток зарядки макрочастицы. Например, в стационарном и изотропном случаях получаем:

$$\mathbf{J}_\sigma(r) = -e_\sigma n_\sigma \frac{\mathbf{r}}{r^3} \int d\mathbf{v} S^{(0)}_\sigma(v), \quad r > 0, \tag{19}$$

в согласии с уравнениями непрерывности, которые следуют из (3).

3. Влияние свойств плазмы на эффективный потенциал макрочастицы. Далее более детально рассмотрим влияние свойств плазмы на характерные особенности эффективного потенциала макрочастицы, заряд которой поддерживается плазменными потоками. В случае *изотропной плазмы без внешних полей* уравнение (9) для вероятности перехода превращается в следующее:

$$\left\{\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\right\} W_\sigma(X, X'; \tau) = -\nu_\sigma \Big[W_\sigma(X, X'; \tau) - \\ - \Phi_\sigma(\mathbf{v}) \int d\mathbf{v} W_\sigma(X, X'; \tau) \Big]. \tag{20}$$

Решение этого уравнения в $(\mathbf{k}, \omega)$-представлении и функция диэлектрического отклика имеют вид (см., например, [16])

$$W_{\sigma\mathbf{k}\omega}(\mathbf{v},\mathbf{v}') = \frac{i\delta(\mathbf{v} - \mathbf{v}')}{\omega - \mathbf{k}\mathbf{v} + i\nu_\sigma} - \\ - \frac{\nu_\sigma \Phi_\sigma(\mathbf{v})}{(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v} + i\nu_\sigma)(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}' + i\nu_\sigma)} \times \\ \times \left[1 - i\nu_\sigma \int d\mathbf{v} \frac{\Phi_\sigma(\mathbf{v})}{\omega - \mathbf{k}\mathbf{v} + i\nu_\sigma}\right]^{-1}, \tag{21}$$

$$\varepsilon(\mathbf{k},\omega) = 1 + \sum_\sigma \frac{k_\sigma^2}{k^2} \frac{(\omega + i\nu_\sigma) W(z_\sigma)}{\omega + i\nu_\sigma W(z_\sigma)}, \tag{22}$$

где

$$z_\sigma = \frac{\omega + i\nu_\sigma}{k s_\sigma}, \qquad s_\sigma = \left(\frac{T_\sigma}{m_\sigma}\right)^{1/2},$$

$W(z)$ – дисперсионная функция плазмы:

$$W(z) = 1 - z\exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) \times \\ \times \int_0^z dt \exp\left(\frac{t^2}{2}\right) + i\left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/2} z \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right).$$

В этом случае решение уравнения (14) для стационарного потенциала макрочастицы дает

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{qe^{-k_D r}}{r} + i\sum_\sigma 4\pi e_\sigma n_\sigma \times$$
$$\times \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3}\frac{e^{i\mathbf{kr}}}{k^2+k_D^2}\,\frac{\int \frac{v\sigma_\sigma(q,v)f_{0\sigma}(v)}{\mathbf{kv}-i\nu_\sigma}d\mathbf{v}}{1+i\nu_\sigma\int\frac{\Phi_\sigma(\mathbf{v})}{\mathbf{kv}-i\nu_\sigma}d\mathbf{v}}. \qquad (23)$$

В бесстолкновительном пределе ($\nu_\sigma \to 0$) это соотношение заметно упрощается:

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{qe^{-k_D r}}{r} + i\sum_\sigma 4\pi e_\sigma n_\sigma \times$$
$$\times \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3}\frac{e^{i\mathbf{kr}}}{k^2+k_D^2}\int\frac{v\sigma_\sigma(q,v)f_{0\sigma}(v)}{\mathbf{kv}-i0}d\mathbf{v}, \qquad (24)$$

что дает

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{q}{r}e^{-k_D r} - \frac{\widetilde{Q}}{r}g(k_D r), \qquad (25)$$

где

$$g(x) = e^{-x}\mathrm{Ei}(x) - e^{x}\mathrm{Ei}(-x),$$
$$\widetilde{Q} = \frac{2\pi}{k_D}\sum_\sigma e_\sigma n_\sigma \int_0^\infty dv\, v^2\sigma_\sigma(q,v)f_{0\sigma}(v), \qquad (26)$$

$\mathrm{Ei}(x)$ – интегральная показательная функция. При $k_D r \gg 1$ с учетом асимптотического поведения $\mathrm{Ei}(x) \asymp \frac{1}{x}e^x$ из (25) получаем:

$$\Phi(r) \simeq -2\widetilde{Q}/k_D r^2 \qquad (27)$$

в согласии с хорошо известным результатом [3].

В сильностолкновительном пределе ($\nu_\sigma \gg ks_\sigma$) уравнение (14) дает

$$\phi_{\mathbf{k}} = \frac{4\pi q}{k^2+k_D^2} - \frac{4\pi}{k^2+k_D^2}\frac{1}{k^2}\sum_\sigma\frac{e_\sigma S_\sigma}{D_\sigma}, \qquad (28)$$

где

$$S_\sigma = n_\sigma\int S_\sigma^{(0)}(v)d\mathbf{v} = n_\sigma\int v\sigma_\sigma(q,v)f_{0\sigma}(\mathbf{v})d\mathbf{v},$$
$$D_\sigma = s_\sigma^2/\nu_\sigma, \qquad (29)$$

что находится в согласии с результатом, полученным в [13, 14] на основе дрейфово-диффузионного приближения. При выводе (28) принято, что $\Phi_\sigma(\mathbf{v}) = f_{0\sigma}(\mathbf{v})$ и, таким образом, в рассматриваемом случае ($\nu_\sigma \gg ks_\sigma$)

$$1 + i\nu_\sigma\int\frac{\Phi_\sigma(\mathbf{v})}{\mathbf{kv}-i\nu_\sigma}d\mathbf{v} = W\left(\frac{i\nu_\sigma}{ks_\sigma}\right) \simeq \frac{k^2 s_\sigma^2}{\nu_\sigma^2};$$

$$\int\frac{v\sigma_\sigma(q,v)f_{0\sigma}(v)}{\mathbf{kv}-i\nu_\sigma}d\mathbf{v} \simeq \frac{i}{\nu_\sigma}\int v\sigma_\sigma(q,v)f_{0\sigma}(v)d\mathbf{v}.$$

Выражение (28) приводит к решению

$$\phi(\mathbf{r}) = (q+\tilde{S})\frac{e^{-k_D r}}{r} - \frac{\tilde{S}}{r}, \qquad (30)$$

где

$$\tilde{S} = \sum_\sigma\frac{e_\sigma S_\sigma}{k_D^2 D_\sigma}.$$

В случае, когда столкновениями нельзя пренебречь, но $\nu_\sigma \ll ks_\sigma$

$$1 + i\nu_\sigma\int\frac{d\mathbf{v}f_{0\sigma}(v)}{\mathbf{kv}-i\nu_\sigma} \simeq 1 - \left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/2}\frac{\nu_\sigma}{ks_\sigma}$$

и

$$\phi_k = \frac{4\pi q}{k^2+k_D^2} - \sum_\sigma\frac{8\pi^3 e_\sigma n_\sigma}{(k^2+k_D^2)}\frac{1}{k}\times$$
$$\times\int_0^\infty\sigma_\sigma(q,v)f_{0\sigma}(v)\left[1+\frac{\nu_\sigma}{ks_\sigma}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/2}\right]v^2dv. \qquad (31)$$

В итоге в координатном представлении имеем

$$\phi(r) = (q+Q)\frac{e^{-k_D r}}{r} - \frac{\widetilde{Q}}{r}g(k_D r) - \frac{Q}{r}, \qquad (32)$$

где

$$Q = \frac{2\pi^2}{k_D^2}\sum_\sigma\frac{e_\sigma n_\sigma\nu_\sigma}{s_\sigma}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/2}\times$$
$$\times\int_0^\infty\sigma_\sigma(q,v)f_{0\sigma}(v)\,v^2dv. \qquad (33)$$

Следовательно, можно сделать вывод, что именно столкновения плазменных частиц с нейтральными атомами (совместно со стоками плазменных частиц) приводят к поведению эффективного потенциала, подобного кулоновскому на больших расстояниях $r \gg \lambda_D$.

Если есть внешнее магнитное поле $\mathbf{B}_0 = \mathbf{e}_z B_0$, то вероятность перехода описывается выражением

$$W_{\sigma\mathbf{k}\omega}(\mathbf{v},\mathbf{v}') = \widetilde{W}_{\sigma\mathbf{k}\omega}(\mathbf{v},\mathbf{v}') +$$
$$+\frac{\nu_\sigma\int d\mathbf{v}'\widetilde{W}_{\sigma\mathbf{k}\omega}(\mathbf{v},\mathbf{v}')\Phi_\sigma(\mathbf{v}')\int d\mathbf{v}\widetilde{W}_{\sigma\mathbf{k}\omega}(\mathbf{v},\mathbf{v}')}{1-\nu_\sigma\int d\mathbf{v}\int d\mathbf{v}'\widetilde{W}_{\sigma\mathbf{k}\omega}(\mathbf{v},\mathbf{v}')\Phi_\sigma(\mathbf{v}')}, \qquad (34)$$

где $\widetilde{W}_{\sigma\mathbf{k}\omega}(\mathbf{v},\mathbf{v}')$ – фурье-образ вероятности перехода:

$$\widetilde{W}_\sigma(X,X';\tau) = e^{-\nu_\sigma\tau}\times$$
$$\times\delta\left[X-\Omega_\sigma^{-1}\left(v_x'\sin\Omega_\sigma\tau + v_y'(1-\cos\Omega_\sigma\tau)\right)\right]\times$$
$$\times\delta\left[Y-\Omega_\sigma^{-1}\left(-v_x'(1-\cos\Omega_\sigma\tau) + v_y'\sin\Omega_\sigma\tau\right)\right]\times$$
$$\times\delta(Z-v_z\tau)\,\delta\left(v_x - v_x'\cos\Omega_\sigma\tau - v_y'\sin\Omega_\sigma\tau\right)\times$$
$$\times\delta\left(v_y + v_x'\sin\Omega_\sigma\tau - v_y'\cos\Omega_\sigma\tau\right)\delta(v_z - v_z'); \qquad (35)$$

$$\Omega_\sigma = e_\sigma B_0/m_\sigma c,$$

(c – скорость света) который является вероятностью перехода, вычисленной с учетом столкновений в τ-приближении. Отметим, что $\phi_{\mathbf{k}\omega}$ и $\varepsilon(\mathbf{k},\omega)$ выражены в терминах величины

$$W_{\sigma\mathbf{k}\omega}(\mathbf{v}') = \int d\mathbf{v} W_{\sigma\mathbf{k}\omega}(\mathbf{v},\mathbf{v}').$$

Если функция распределения $f_{0\sigma}(\mathbf{v})$ и интенсивность стока $S_\sigma^{(0)}(\mathbf{v})$ зависят от $v_\perp$ и v_z, то последнюю величину можно записать в виде

$$W_{\sigma\mathbf{k}\omega}(\mathbf{v}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n^2\left(\frac{k_\perp v_\perp}{\Omega_\sigma}\right)\frac{i}{\omega - n\Omega_\sigma - k_z v_z + i\nu_\sigma},$$

где $J_n(x)$ – функция Бесселя. Используя это соотношение, получим:

$$\phi_{\mathbf{k}} = \frac{4\pi q}{k^2+k_D^2} + \frac{4\pi i}{k^2+k_D^2}\sum_\sigma e_\sigma n_\sigma \times$$
$$\times \sum_{n=-\infty}^{\infty}\int d\mathbf{v} J_n^2\left(\frac{k_\perp v_\perp}{\Omega_\sigma}\right)\frac{S_\sigma^{(0)}(\mathbf{v})}{k_z v_z + n\Omega_\sigma - i\nu_\sigma} \times$$
$$\times\left[1+i\nu_\sigma\sum_n\int d\mathbf{v} J_n^2\left(\frac{k_\perp v_\perp}{\Omega_\sigma}\right)\frac{f_{0\sigma}(\mathbf{v})}{k_z v_z+n\Omega_\sigma-i\nu_\sigma}\right]^{-1}. \quad (36)$$

Это выражение описывает потенциал макрочастицы в столкновительной магнитоактивной плазме при условии, что интенсивности стоков $S_\sigma^{(0)}(\mathbf{v})$ известны. Что касается явной формы невозмущенного распределения, знаменатель в последнем произведении (36) можно представить в виде

$$F_\sigma(\mathbf{k}) = 1 +$$
$$+i\nu_\sigma\sum_{n=-\infty}^{\infty}\int d\mathbf{v} J_n^2\left(\frac{k_\perp v_\perp}{\Omega_\sigma}\right)\frac{f_{0\sigma}(\mathbf{v})}{k_z v_z+n\Omega_\sigma-i\nu_\sigma} =$$
$$= 1 + \sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{i\nu_\sigma}{n\Omega_\sigma - i\nu_\sigma}\Lambda_n(\beta_\sigma) \times$$
$$\times\left[1 - W\left(\frac{i\nu_\sigma - n\Omega_\sigma}{|k_z|S_\sigma}\right)\right]. \quad (37)$$

Здесь $\Lambda_n(\beta) = I_n(\beta)e^{-\beta}$, $\beta_\sigma = k_\perp^2 S_\sigma^2/\Omega_\sigma^2$, $I_n(\beta)$ – модифицированная функция Бесселя 2-го рода.

В случае бесстолкновительной плазмы уравнение (36) упрощается:

$$\phi_{\mathbf{k}} = \frac{4\pi q}{k^2+k_D^2} - \frac{4\pi^2}{k^2+k_D^2}\sum_\sigma e_\sigma n_\sigma \sum_{n=-\infty}^{\infty}\int d\mathbf{v} \times$$
$$\times J_n^2\left(\frac{k_\perp v_\perp}{\Omega_\sigma}\right) S_\sigma^{(0)}(\mathbf{v})\delta\left(k_z v_z + n\Omega_\sigma\right). \quad (38)$$

Для того чтобы провести вычисления дальше, нужно определить вид зависимости $S_\sigma^{(0)}(\mathbf{v})$. Это легко можно сделать в пределе $B_0 \to \infty$. В этом случае можно положить:

$$S_\sigma^{(0)}(\mathbf{v}) = |v_z|\sigma_\sigma(q,v_z)f_{0\sigma}(\mathbf{v}),$$
$$\sigma_\sigma(q,v_z) = \pi a^2\theta\left(v_z^2 - \frac{2e_\sigma q}{m_\sigma a}\right), \quad (39)$$
$$f_{0\sigma}(\mathbf{v}) = \delta(\mathbf{v}_\perp)\left(\frac{m_\sigma}{2\pi T_\sigma}\right)^{1/2}\exp\left(-\frac{m_\sigma v_z^2}{2T_\sigma}\right) =$$
$$= \delta(\mathbf{v}_\perp)f_{0\sigma}(v_z).$$

Подстановка (39) в (38) дает

$$\phi_{\mathbf{k}} = \frac{4\pi q}{k^2+k_D^2} - \frac{4\pi^2}{k^2+k_D^2}\sum_\sigma e_\sigma n_\sigma \times$$
$$\times\int_{-\infty}^{\infty} f_{0\sigma}(v_z)\sigma_\sigma(q,v_z)\delta(k_z)dv_z, \quad (40)$$

что приводит к выражению

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{qe^{-k_D r}}{r} - \Phi_0 K_0(k_D r_\perp). \quad (41)$$

Здесь $K_0(x)$ – функция Макдональда, а величина Φ_0 определена выражением

$$\Phi_0 = \sum_\sigma e_\sigma n_\sigma \int dv_z \sigma_\sigma(q,v_z)f_{0\sigma}(v_z). \quad (42)$$

Таким образом, в случае сильно намагниченной бесстолкновительной плазмы основной вклад в эффективный потенциал макрочастицы дают индуцированные стоком частиц плазмы аксиально-симметричные (относительно оси, проходящей через центр макрочастицы и направленной вдоль внешнего магнитного поля) струны объемного заряда с плотностью, связанной со вторым слагаемым в (8):

$$\rho(\mathbf{r}) = -\delta(\mathbf{r}_\perp)\sum_\sigma e_\sigma n_\sigma \int dv_z f_{0\sigma}(v_z)\sigma_\sigma(q,v_z). \quad (43)$$

Соответственно, плотность тока зарядки дается выражением

$$J_z(\mathbf{r}) = -\delta(\mathbf{r}_\perp)\frac{z}{|z|}\sum_\sigma \pi e_\sigma n_\sigma \times$$
$$\times\int dv_z|v_z|f_{0\sigma}(v_z)\sigma_\sigma(q,v_z), \quad (44)$$

что приводит к следующему выражению для потока заряда на поверхность макрочастицы

$$I_d = \sum_\sigma 2\pi e_\sigma n_\sigma \int dv_z|v_z|f_{0\sigma}(v_z)\sigma_\sigma(q,v_z). \quad (45)$$

Положив $I_d = 0$, приходим к уравнению для определения стационарного значения заряда q.

Рассмотрим далее *случай сильно намагниченной плазмы* $|\Omega_\sigma| > k_\perp s_\sigma$ *с частыми столкновениями* $\nu_\sigma \gg |k_z| s_\sigma$. В этом случае

$$F_\sigma(\mathbf{k}) \simeq \frac{1}{\nu_\sigma}\left(k_\perp^2 D_{\sigma\perp} + k_z^2 D_{\sigma\parallel}\right); \qquad D_{\sigma\perp} = \frac{s_\sigma^2 \nu_\sigma}{\Omega_\sigma^2 + \nu_\sigma^2}; \qquad D_{\sigma\parallel} = \frac{s_\sigma^2}{\nu_\sigma}, \tag{46}$$

и, следовательно,

$$\phi_{\mathbf{k}} = \frac{4\pi}{k^2 + k_D^2}\left(q - \frac{e_\sigma n_\sigma \int S_\sigma^{(0)}(\mathbf{v})\, d\mathbf{v}}{k_\perp^2 D_{\sigma\perp} + k_z^2 D_{\sigma\parallel}}\right). \tag{47}$$

Обратное фурье-преобразование (47) в общем случае может быть выполнено только численно. Аналитические оценки для $r \gg \lambda_D$ дают:

$$\Phi(\mathbf{r}) \simeq -\frac{\widetilde{S}(\vartheta)}{r}, \tag{48}$$

$$\widetilde{S}(\vartheta) = \sum_\sigma \frac{e_\sigma S_\sigma}{k_D^2 D_{\sigma\perp}\sqrt{1 + (D_{\sigma\parallel}/D_{\sigma\perp} - 1)\sin^2\vartheta}}, \tag{49}$$

где ϑ – угол между векторами $\mathbf{r}$ и $\mathbf{e}_z$.

Заключение. Кинетическое описание эффективного потенциала макрочастиц на основе модели точечного стока со столкновительным интегралом в форме БГК позволил воспроизвести результаты, известные из решений гидродинамических уравнений и бесстолкновительного кинетического уравнения. При соответствующем выборе заряда макрочастицы и интенсивности стока полученные соотношения воспроизводят с хорошей точностью численные решения нелинейной краевой задачи. Показано, что модель точечного стока может быть эффективно использована для описания эффективного потенциала и в присутствии внешнего магнитного поля.

1. I. B. Bernstein and I. V. Rabinovich, Phys. Fluids **2**, 112 (1959).
2. J. E. Dougherty, R. K. Porteous, M. D. Kilgore, and D. B. Graves, J. Appl. Phys. **72**, 3934 (1992).
3. V. N. Tsytovich, Ya. K. Khodataev, and R. Bingham, Comm. Plasma Phys. and Contr. Fusion **17**, 249 (1996).
4. T. Bystrenko and A. Zagorodny, Phys. Lett. A **299**, 383 (2002).
5. J. G. Laframbois and L. W. Parker, Phys. Fluids **15**, 629 (1973).
6. J. Goree, Phys. Rev. Lett. **69**, 277 (1992).
7. M. Lampe, G. Joyce, G. Ganguli, and V. Gavrishchaka, Phys. Plasmas **7**, 3851 (2000).
8. M. Lampe, V. Gavrishchaka, G. Ganguli, and G. Joyce, Phys. Rev. Lett. **86**, 5378 (2001).
9. А. Ф. Паль, А. Н. Старостин, А. В. Филиппов, Физика плазмы **27**, 155 (2001).
10. А. Ф. Паль, А. О. Серов, А. Н. Старостин и др., ЖЭТФ **119**, 272 (2001).
11. А. Ф. Паль, Д. В. Сивохин, А. Н. Старостин и др., Физика плазмы **28**, 32 (2002).
12. O. Bystrenko and A. Zagorodny, Phys. Rev. E **67**, 066403 (2003).
13. А. В. Филиппов, А. Г. Загородний, А. И. Момот и др., ЖЭТФ **131**, 164 (2007).
14. A. G. Zagorodny, A. V. Filippov. A. F. Pal' et al., Plasma Physics Series No **12**, 99 (2006).
15. P. L. Bhatnagar, P. E. Gross, and M. Krook, Phys. Rev. **54**, 511 (1954).
16. Yu. L. Klimontovich, H. Wilhelmsson, I. P. Yakimenko, and A. G. Zagorodny, Phys. Rep. **175**, 265 (1989).