Письма в ЖЭТФ, том 86, вып. 12, с. 901 – 906

О совместном измерении энергии и времени “прилета” фотона

С. Н. Молотков

Институт физики твердого тела РАН, 142432 Черноголовка, Московская обл., Россия

Академия Криптографии РФ, 121552 Москва, Россия

Факультет вычислительной математики и кибернетики, МГУ им. М.В. Ломоносова, 119992 Москва, Россия

Поступила в редакцию 30 октября 2007 г.

Предложено совместное измерение энергии и времени “прилета” для однофотонного пакета, обсуждается также возможная экспериментальная реализация такого измерения с использованием параметрического преобразования вверх по энергии (up conversion).

PACS: 03.65.Hk, 03.67.Dd

Как известно некоммутативность эрмитовых операторов в квантовой механике, отвечающих динамическим переменным, приводит к соотношениям неопределенностей. Однако из факта существования некоммутируемых наблюдаемых не следует невозможности совместного измерения таких наблюдаемых.

Неформально все измерения в квантовой механике происходят следующим образом. Имеется одно и то же входное измеряемое квантовое состояние, которое поступает на некоторый измеряющий прибор. В результате измерений на одном и том же входном квантовом состоянии на выходе прибора возникает распределение вероятностей.

Применительно к соотношениям неопределенностей, сначала на одном и том же квантовом состоянии измеряется одна наблюдаемая, что дает одномерное распределение вероятностей для значений данной наблюдаемой. Затем подсчитывается среднее значение и дисперсия. После этого на том же входном состоянии измеряется другая наблюдаемая и для нее также подсчитывается среднее и диспресия. Если наблюдаемые некоммутируют, то произведение дисперсий на любом входном квантовом состоянии ограничено снизу.

Подчеркнем, что для измерения *разных* наблюдаемых используются *разные* измеряющие приборы.

При совместных измерениях на выходе *одного и того же прибора* при измерении на одном и том же входном квантовом состоянии возникает совместное (двумерное) распределение значений двух наблюдаемых. На двумерном распределении вероятностей также может быть подсчитано среднее и диспресия значений каждой из наблюдаемых. Совместные измерения в определенном смысле являются промежуточными между измерения значений каждой из наблюдаемых по отдельности (при помощи разных приборов), поэтому естественно не приводят к нарушению соотношений неопределенностей. В совместных измерениях каждый раз после акта измерения возникают два значения для двух наблюдаемых.

Отметим здесь же, что совместные измерения нужно отличать от последовательных измерений, когда значения двух наблюдаемых получаются последовательным измерением. Сначала используется прибор, измеряющий значения одной наблюдаемой, затем после выхода данного прибора, *уже в общем случае, возмущенное после первого измерения состояние* поступает на вход второго прибора.[1)] При последовательных измерениях также не происходит нарушения соотношений неопределенностей.

Нужно подчеркнуть, что при стандартном выводе соотношений неопределенностей всегда подразумевается первый способ измерений, хотя не всегда это явно оговаривается.

Ниже будем рассматривать совместные измерения энергии и времени “прилета” однофотонного пакета. Будет приведено формальное описание такого совместного измерения и предложена экспериментальная схема для его реализации, основанная на про-

---

[1)] Принципиально важно отметить, что при последовательных измерениях возникает *не совместное двумерное распределение вероятностей, а скорее распределение условных вероятностей.* Поэтому совместное двумерное распределение вероятностей энергии и времени не может, например, возникнуть при прохождении однофотонного пакета через частотный фильтр с последующим измерением времени регистрации. Как будет видно ниже, для реализации совместных измерений принципиально необходима вспомогательная квантовая система. Говоря более формально, без использования вспомогательной квантовой системы, принципиально невозможно построить положительную операторнозначную меру от двух параметров, реализующую разложение единицы – описывающую совместное измерение (см., например, [5]).

цессе преобразования энергии вверх по энергии на нелинейном кристалле.

Будем рассматривать однофотонные пакеты. Состояния свободного квантованного поля (точнее, обобщенные собственные векторы) порождаются действием на вакуумный вектор полевых операторов (обобщенных функций с операторными значениями)

$$\varphi^{+}(\hat{x})=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int d\hat{k}\delta(\hat{k}^{2})\theta(k_{0})\mathrm{e}^{i\hat{k}\hat{x}}a^{+}(\hat{k}), \qquad (1)$$

$$\hat{k}=(k,k_{0}),\quad \hat{x}=(x,t),\quad \hat{k}=dkdk_{0},\quad \hat{k}\hat{x}=kx-k_{0}t.$$

Операторы рождения и уничтожения удовлетворяют коммутационным соотношениям

$$[a^{-}(\hat{k}),a^{+}(\hat{k}')]=k_{0}\delta(k-k'). \qquad (2)$$

Физические состояния поля $|\psi\rangle\in\mathcal{H}$, принадлежащие гильбертову пространству состояний, определяются как результат сглаживания операторных обобщенных функций с основными функциями $\psi(\hat{x})\in\Omega(\hat{x})$ (и $\varphi^{+}(\hat{x})|0\rangle\in\Omega^{*}(\hat{x})$ – обобщенные собственные векторы, непрерывные линейные функционалы над $\Omega(\hat{x})$, и $\Omega(\hat{x})\subset\mathcal{H}\subset\Omega^{*}(\hat{x})$ – оснащенное гильбертово пространство). Имеем (далее $\hbar=c=1$)

$$\begin{aligned}|\psi\rangle&=\int d\hat{x}\psi(\hat{x})\varphi^{+}(\hat{x})|0\rangle=\\&=\int d\hat{k}\psi(\hat{k})\delta(\hat{k}^{2})\theta(k_{0})a^{+}(\hat{k})|0\rangle=\\&=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dk}{k_{0}}\psi(k,k_{0}=|k|)|\hat{k}\rangle,\end{aligned} \qquad (3)$$

$$|\hat{k}\rangle=a^{+}(\hat{k})|0\rangle,\quad \langle\hat{k}|\hat{k}'\rangle=k_{0}\delta(k-k'),$$

$$\psi(\hat{k})=\int d\hat{x}\psi(\hat{x})e^{-i\hat{k}\hat{x}},$$

где dk/k_0 – лоренц-инвариантный объем интегрирования. Вклад в физическое состояние $|\psi\rangle$ дают значения амплитуды $\psi(k,k_0=|k|)$ на массовой поверхности (передней части светового конуса в импульсном представлении).

Будем рассматривать состояния, распространяющиеся в одном направлении[2)]. Для состояний, распространяющихся в обоих направлениях, невозможно осмысленно ввести понятие времени наступления события. Для состояний, распространяющихся в одном направлении (будем для определенности считать $k>0$) из-за линейной связи, энергия и импульс представляют собой одно и то же, $k_0=|k|=k$ (далее для обозначения энергии будем использовать обозначение, принятое в квантовой оптике, $\varepsilon=k_0$). Для таких состояний вклад в (3) дают лишь векторы с $k>0$, и амплитуда $\psi(k,k)$ отлична от нуля при $k>0$.

Если $\mathcal{H}$ – гамильтониан системы, то для него имеет место спектральное представление

$$\mathcal{H}=\int_{0}^{\infty}\varepsilon\mathcal{M}(d\varepsilon),\quad \mathcal{M}(d\varepsilon)=|\varepsilon\rangle\langle\varepsilon|d\varepsilon=|k\rangle\langle k|\frac{dk}{k}, \qquad (4)$$

где $\mathcal{M}(d\varepsilon)$ – спектральное семейство ортогональных проекторов, которые дают разложение единицы:

$$I=\int_{0}^{\infty}\mathcal{M}(d\varepsilon). \qquad (5)$$

При измерении состояния $|\psi\rangle$ вероятность получить значение энергии в интервале $(\varepsilon,\varepsilon+d\varepsilon)$ дается формулой

$$\begin{gathered}\mu(d\varepsilon)=\mathrm{Tr}\{\mathcal{M}(d\varepsilon)\rho\}=|\psi(\varepsilon)|^{2}d\varepsilon,\\ \rho=|\psi\rangle\langle\psi|,\quad \psi(\varepsilon)=\frac{\psi(k,k)}{\sqrt{k}}.\end{gathered} \qquad (6)$$

Среднее значение энергии (импульса) в состоянии $|\psi\rangle$ равно

$$\overline{\varepsilon}=\int_{0}^{\infty}\varepsilon\mu(d\varepsilon)=\int_{0}^{\infty}\varepsilon|\psi(\varepsilon)|^{2}d\varepsilon. \qquad (7)$$

В квантовой механике время не является динамической переменной, которой отвечает эрмитов оператор, а представляет собой параметр [1]. Ограниченность спектра гамильтониана снизу приводит к тому, что в общем случае невозможно ввести эрмитов оператор времени [2].

Хотя время и не является динамической переменной, в экспериментах довольно обычна ситуация, когда измеряется время наступления события (arrival time) – "прилета" фотона. Рассмотрение различных ситуаций, относящихся к измерению времени, можно найти в [2–9]. Пусть в эксперименте фиксируется время наступления события, в этом случае пространством результатов является время регистрации. Связь распределения вероятностей над пространством результатов (времени регистрации) и состоянием квантовой системы дается положительной операторнозначной мерой. Точнее говоря, каждому подмножеству пространства результа-

[2)] Данный пример хотя и является в определенном смысле модельным, но тем не менее содержит все основные особенности. Кроме того, как правило, многие эксперименты с фотонами проводятся над пучками или на оптоволоконных системах, которые являются квазиодномерными объектами. Кроме того, индекс, отвечающий спиральности, опускаем, как несущественный в данной задаче.

тов $\Delta_t \in (-\infty,\infty)$ сопоставляется положительный эрмитов оператор $\mathcal{M}(\Delta_t)$ такой, что

$$\mathcal{M}(\cup\Delta_{it}) = \sum_i \mathcal{M}(\Delta_{it}), \quad \Delta_{it}\cap\Delta_{jt}=\emptyset. \tag{8}$$

Условие нормировки – равенство единице полной вероятности наступления событий во всем пространстве результатов – дает

$$\mathcal{M}(\Delta_{(-\infty,\infty)}) = I, \quad \Delta_{(-\infty,\infty)} \equiv (-\infty,\infty). \tag{9}$$

Другим естественным требованием, которому должна удовлетворять операторнозначная мера в разложении единицы (9), является условие ковариантности [2]. Сдвиг начала отсчета по времени в процедуре приготовления квантового состояния должен приводить к соответствующему сдвигу в распределении вероятностей. Имеем

$$\hat{U}_{t_0}\mathcal{M}(\Delta_t)\hat{U}_{t_0}^{-1} = \mathcal{M}(\Delta_{t-t_0}), \tag{10}$$

где $\hat{U}_t$ – оператор эволюции (сдвига во времени).

Можно ввести максимально симметричный оператор времени [2]

$$\mathcal{T} = \int_{-\infty}^{\infty} t\mathcal{M}(dt). \tag{11}$$

Среднее значение времени регистрации при измерении состояния $|\psi\rangle$ дается стандартным соотношением

$$\bar{t} = \int_{-\infty}^{\infty} t\mathrm{Tr}\{\mathcal{M}(dt)\rho\}, \quad \rho = |\psi\rangle\langle\psi|. \tag{12}$$

В релятивистском случае время не является абсолютной категорией, поэтому, на первый взгляд, соотношение неопределенностей энергия – время является еще менее четким понятием, чем в нерелятивистском случае. Однако специфика фотона состоит в том, что связь между импульсом и энергией является линейной, поэтому можно даже ввести лоренц-инвариантное соотношение неопределенностей энергия – время[3)] [12].

[3)]В классическом случае также существует “соотношение неопределенностей” энергия(частота) – время $\overline{(\Delta\omega)^2}\ \overline{(\Delta t)^2} \geq$ $\geq 0.2951\ldots > 1/4$ [10] (см. также [11]), которое, однако, для классического сигнала не ограничивает точность измерения энергии и времени, а устанавливает лишь соотношение между шириной частотного спектра сигнала и его шириной по времени. Удивительно, что численно нижняя граница в классическом случае совпадает с нижней границей для фотона в квантовом случае, где эта граница лимитирует предел точности измерений [12]. Тот факт, что нижняя граница превышает соответствующую границу для соотношения неопределенностей координата – импульс 1/4, связан с наличием нижней границы спектра гамильтониана $\varepsilon \in (0,\infty)$, которая, в свою очередь, приводит к отсутствию эрмитова оператора времени.

Рассмотрим теперь измерение положения частицы, последнее для состояний, распространяющихся в одном направлении ($k>0$), может быть представлено в виде разложения единицы

$$\begin{aligned} I &= \int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\tau}{2\pi}\left(\int_0^{\infty}\frac{dk}{\sqrt{k}}e^{-ik\tau}|\hat{k}\rangle\right)\times \\ &\times\left(\int_0^{\infty}\frac{dk'}{\sqrt{k'}}\langle\hat{k}'|e^{ik'\tau}\right) = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\tau}{2\pi}\left(\int_0^{\infty}d\varepsilon e^{-i\varepsilon\tau}|\varepsilon\rangle\right)\times \\ &\times\left(\int_0^{\infty}d\varepsilon'\langle\varepsilon'|e^{i\varepsilon'\tau}\right) = \int_{-\infty}^{\infty}\mathcal{M}(d\tau), \end{aligned} \tag{13}$$

где $\tau = x - t$. Измерение координаты x является, по сути, измерением времени срабатывания t. Более точно, пространством результатов реально является по отдельности не x или t, а их разность τ. Разложение единицы (13) является формальным описанием прибора, которое может быть интерпретировано следующим образом. Если считать пространством результатов x, то измерение следует понимать как распределенный по x прибор, который выдает случайный результат в одной точке $(x, x+dx)$ в момент t. Если фиксировать x, то измерение описывает локальный по x прибор, работающий в ждущем режиме, который выдает результат в случайный момент времени $(t, t+dt)$. То обстоятельство, что операторнозначная мера $\mathcal{M}(d\tau)$ в (13) зависит лишь от разности $\tau = x-t$, выражает тот факт, что если результат с какой-то вероятностью может быть получен в точке x в момент времени t, то с той же вероятностью он может быть получен в другой точке x', но в момент времени $t' = x' - x + t$.

Соответственно вероятность получения результата в интервале времени $(\tau, \tau+\tau)$ по определению равна

$$\mu(d\tau) = \mathrm{Tr}\{\mathcal{M}(d\tau)\rho\} = |\psi(\tau)|^2 d\tau, \tag{14}$$

$$\psi(\tau) = \int_0^{\infty} d\varepsilon\psi(\varepsilon)e^{-i\varepsilon\tau} = \int_0^{\infty}\frac{dk}{\sqrt{k}}\psi(k,k)e^{-ik\tau}. \tag{15}$$

Обратим внимание на то, что $\psi(\tau)$ по сути совпадает с волновой функцией Ландау–Пайерлса в координатном (временно́м) представлении [13].

Перейдем теперь к построению измерения для совместного измерения энергии и времени. Операторы энергии (4) и времени (11) не коммутируют, поэтому не существует совместного ортогонального спектрального семейства, которое давало бы маргинальные спектральные плотности[4)]. Точнее, не существует операторнозначной меры $\mathcal{M}(d\tau, d\varepsilon)$ такой, что

$$\mathcal{M}(d\tau) = \int_\varepsilon \mathcal{M}(d\tau, d\varepsilon) - \text{спектральное семейство оператора времени из (11)} \quad (16)$$

и

$$\mathcal{M}(d\varepsilon) = \int_\tau \mathcal{M}(d\tau, d\varepsilon) - \text{спектральное семейство оператора энергии (4).} \quad (17)$$

Однако этот факт не означает невозможности совместного измерения энергии и времени. Естественно, совместное измерение энергии и времени не приводит к нарушению соотношения неопределенностей (см. ниже).

Общая идея построения совместных измерений сводится к следующему. Введем вспомогательную систему – еще один однофотонный пакет с вектором состояния $|\phi\rangle$ ($\rho_0 = |\phi\rangle\langle\phi|$). Будем считать, что состояние $|\phi\rangle$ сдвинуто по времени относительно состояния $|\psi\rangle$ на величину τ, последнее означает, что в состоянии $|\phi\rangle$ под интегралом появляется дополнительный фазовый множитель

$$|\psi\rangle = \int_0^\infty d\varepsilon \psi(\varepsilon)|\varepsilon\rangle, \quad |\phi\rangle = \int_0^\infty d\varepsilon \phi(\varepsilon) e^{-i\varepsilon\tau}|\varepsilon\rangle. \quad (18)$$

Соответствующие операторы энергии и времени для него будем снабжать индексом 0. Оператор энергии для такой составной системы имеет вид

$$\mathcal{H} \otimes I_0 + I \otimes \mathcal{H}_0, \quad (19)$$

соответственно, оператор времени составной системы

$$\mathcal{T} \otimes I_0 - I \otimes \mathcal{T}_0. \quad (20)$$

Операторы (19) и (20), очевидно, коммутируют, поэтому существует общее для них спектральное семейство $\mathcal{M}(d\tau d\varepsilon)$, которое дает разложение единицы в тензорном произведении пространств состояний для двух пакетов:

$$I \otimes I_0 = \int_{-\infty}^\infty \int_0^\infty \mathcal{M}(d\tau d\varepsilon). \quad (21)$$

[4)]Фактически отсутствие такого совместного ортогонального спектрального семейства приводит к соотношениям неопределенности.

Совместное распределение вероятностей $\mu_\rho(d\tau d\varepsilon)$ энергии и времени для исходного однофотонного пакета дается соотношением

$$\mu_\rho(d\tau d\varepsilon) = \mathrm{Tr}_\rho\{\mathcal{M}_{\rho_0}(d\tau d\varepsilon)\rho\},$$
$$\mathcal{M}_{\rho_0}(d\tau d\varepsilon) = \mathrm{Tr}_{\rho_0}\{\mathcal{M}(d\tau d\varepsilon)\rho_0\} = \langle\phi|\mathcal{M}(d\tau d\varepsilon)|\phi\rangle. \quad (22)$$

Совместное распределение вероятностей (22) энергии и времени для исходного однофотонного пакета зависит от состояния вспомогательного пакета, поэтому существует целый континуум таких измерений. Физический смысл данного обстоятельства будет более ясен при обсуждении схемы эксперимента.

Совместное спектральное семейство (21) имеет вид

$$\mathcal{M}(d\tau d\varepsilon) = \left(\int_0^\varepsilon d\varepsilon_1 e^{-i\varepsilon_1\tau}|\varepsilon_1\rangle \otimes |\varepsilon - \varepsilon_1\rangle\right) \times \\ \times \left(\int_0^\varepsilon d\varepsilon_1' e^{i\varepsilon_1'\tau}\langle\varepsilon_1'| \otimes \langle\varepsilon - \varepsilon_1'|\right)\frac{d\tau d\varepsilon}{2\pi}. \quad (23)$$

Отметим, что семейство $\mathcal{M}(d\tau d\varepsilon)$ положительных операторнозначных мер для составной системы является неортогональным разложением единицы, поскольку в исходном разложении операторов времени для подсистем также фигурируют неортогональные операторнозначные меры, что является отражением того факта, что время является в квантовой механике параметром, а не динамической переменной.

Совместное распределение вероятностей энергии и времени для исходного пакета, с учетом (22) и (23), имеет вид

$$\mu_\rho(d\tau d\varepsilon) = |\int_0^\varepsilon d\varepsilon_1 e^{-i\varepsilon_1\tau}\psi(\varepsilon_1)\phi(\varepsilon - \varepsilon_1)|^2 \frac{d\tau d\varepsilon}{2\pi}. \quad (24)$$

Совместное измерение энергии и времени в определенном смысле является промежуточным между измерением энергии и измерением времени и, естественно, не нарушает соотношения неопределенностей. Если вспомогательное состояние является узкополосным по частоте (соответственно, протяженным по времени), $\phi(\varepsilon) \sim \delta(\varepsilon - \varepsilon_0)$, то вероятность исходов измерений пропорциональна квадрату модуля спектральной плотности исходного однофотонного пакета. То есть в этом предельном случае совместное измерение отвечает измерению энергии.

Если вспомогательное состояние имеет широкополосный спектр (соответственно, является локализованным по времени), $\phi(\varepsilon) \sim \mathrm{const}$, то совместное распределение вероятностей пропорционально квадрату модуля временно́й формы исходного пакета, что аналогично измерению времени.

Обсудим теперь экспериментальную реализацию совместного измерения. Вид операторнозначной меры (23) подсказывает способ реализации измерения. Поскольку на сегодняшний день не существует фотодетекторов, которые могут измерять запутанное состояние пары фотонов (измерение (23) фактически к этому и сводится), то идея состоит в том, чтобы "слить" пару фотонов в один, над которым далее производить измерение обычным фотодетектором. Слияние пары фотонов в один может быть осуществлено при помощи конверсии вверх по энергии при прохождении пары фотонов через нелинейный кристалл (кристалл, у которого отлична от нуля восприимчивость второго порядка).

Взаимодействие фотонов в нелинейном кристалле описывается гамильтонианом в представлении взаимодействия (см. детали, например, в [14]):

$$H_1(t)=\chi\int d\mathbf{x}E_3^{(+)}(\mathbf{x},t)E_1^{(-)}(\mathbf{x},t)E_2^{(-)}(\mathbf{x},t)+\text{h.c.}, \tag{25}$$

где индексы 1,2 отвечают двум входящим модам, индекс 3 – выходящая мода после слияния пары фотонов 1 и 2. Все несущественные константы считаем включенными в определение χ, которую, для простоты, будем считать не зависящей от частоты. Операторы электрического поля для дальнейшего удобно представить в виде

$$E_i^{(-)}(\mathbf{x},t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty d\varepsilon e^{i(\varepsilon t-\mathbf{kx})}\hat{a}^+(\varepsilon)|0\rangle_i = \\ =\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty d\varepsilon e^{i(\varepsilon t-\mathbf{kx})}|\varepsilon\rangle_i,\quad i=1,2,3, \tag{26}$$

где i – номер канала. Аналогично для $E_i^{(+)}(\mathbf{x},t)$. Далее,

$$H_1(t)=\frac{\chi}{(2\pi)^{3/2}}\iiint d\varepsilon_1 d\varepsilon_2 d\varepsilon_3 e^{it(\varepsilon_1+\varepsilon_2-\varepsilon_3)}|\varepsilon_1\rangle_1\otimes \\ \otimes|\varepsilon_2\rangle_2\ \otimes {}_3\langle\varepsilon_3|\int_{\text{vol}} d\mathbf{x}e^{-i\mathbf{x}(\mathbf{k_1}+\mathbf{k_2}-\mathbf{k_3})}+\text{h.c.} \tag{27}$$

Во втором интеграле интегрирование производится по объему кристалла, что дает δ-символ по импульсам и приводит к условию фазового синхронизма ($\mathbf{k_1}+\mathbf{k_2}=\mathbf{k_3}$, $\varepsilon(\mathbf{k_1})+\varepsilon(\mathbf{k_2})=\varepsilon(\mathbf{k_3})$), которое будем считать выполненным[5)]. Далее под χ понимается перенормированное значение с учетом дополнительных множителей от второго интеграла. Восприимчивость первого порядка, которая всегда имеется, для наших целей можно не учитывать.

Эволюция системы описывается S-матрицей:

$$S=1+S^{(1)}+S^{(2)}+\ldots \tag{28}$$

В первом порядке по χ имеем

$$S^{(1)}=i\chi\int_0^\infty\int_0^\varepsilon d\varepsilon d\varepsilon_1|\varepsilon_1\rangle_1\otimes|\varepsilon-\varepsilon_1\rangle_2\otimes\ {}_3\langle\varepsilon|+\text{h.c.} \tag{29}$$

За процесс, связанный со слиянием пары фотонов в один, отвечает слагаемое

$$|\Phi\rangle\propto S^{(1)}\left(|\psi\rangle\otimes|\phi\rangle\right)\propto \\ \propto\chi\int_0^\infty d\varepsilon\left(\int_0^\varepsilon d\varepsilon_1 e^{-i\varepsilon_1\tau}\psi(\varepsilon_1)\phi(\varepsilon-\varepsilon_1)\right)|\varepsilon\rangle. \tag{30}$$

Однофотонное состояние, полученное в результате слияния (up conversion) двух фотонов, пропускается через узкополосный фильтр в интервале частот (энергий)$(\varepsilon,\varepsilon+d\varepsilon)$. Действие фильтра формально описывается проектором, который имеет вид

$$\mathcal{P}(d\varepsilon)=\int_\varepsilon^{\varepsilon+d\varepsilon}|\varepsilon_1\rangle\langle\varepsilon_1|d\varepsilon_1. \tag{31}$$

Вероятность зарегистрировать состояние после прохождения фильтра пропорциональна

$$|\mathcal{P}_\varepsilon|\Phi\rangle|^2\propto|\int_0^\varepsilon d\varepsilon_1 e^{-i\varepsilon_1\tau}\psi(\varepsilon_1)\phi(\varepsilon-\varepsilon_1))|^2 \tag{32}$$

– плотности спектральной компоненты состояния в интервале энергий $(\varepsilon,\varepsilon+d\varepsilon)$. Видно, что выражение (32) по сути совпадает с плотностью вероятности (24) для совместного измерения энергии и времени.

Таким образом, чтобы получить совместное распределение вероятностей, производятся следующие действия. Приготавливаются измеряемое состояние, вспомогательное состояние, сдвинутое по времени на величину τ относительно измеряемого. Фиксируется фильтр на частоте ε. Затем регистрируется *только сам факт* срабатывания фотодетектора в измерительном устройстве, описанном выше. Получается одна точка на плоскости (ε,τ). Далее изменяется сдвиг момента приготовления τ при фиксированном фильтре (энергии). В результате получается срез распределения вероятностей ($\varepsilon=\text{const},\tau\in(-\infty,\infty)$). Срезы распределения по энергии получаются фиксацией момента приготовления τ и измерениями с разными фильтрами. В результате возникает распределение вероятностей (22). Процедура измерения повторяется многократно, но одинаковое число раз при каждом значении (ε,τ).

5) В реальной экспериментальной ситуации размер кристалла всегда конечен, поэтому условие синхронизма выполняется только для определенной части спектра, которая может быть достаточно широкой. Кроме того, вместо фильтра по частоте используется наклон кристалла под разными углами, чтобы фиксировать выходное значение энергии.

Автор благодарит С.П. Кулика за обсуждения. Работа поддержана проектом Российского фонда фундаментальных исследований (# 05-02-17387).

1. W. Heisenberg, Z. Phys. **60**, 56 (1927).
2. A. S. Holevo, *Probabilistic and Statistical Aspects of Quantum Theory*, North-Holland, Amsterdam, 1980.
3. Л. И. Мандельштам, И. Е. Тамм, Изв. АН СССР, сер. физ. **9**, 122 (1945).
4. Н. С. Крылов, В. А. Фок, ЖЭТФ **17**, 93 (1947).
5. E. P. Wigner, in *Aspects of Quantum Theory*, Eds. A. Salam and E. P. Wigner, Cambridge University Press, Mass., 1972, p. 237.
6. Y. Aharonov and D. Bohm, Phys. Rev. **122**, 1649 (1961); Y. Aharonov and J. L. Safko, Ann. Phys. **91**, 279 (1975).
7. В. А. Фок, ЖЭТФ **42**, 1135 (1962).
8. P. Busch, quant-ph/0105049; P. Busch, M. Grabowski, and P. J. Lahti, Springer Lecture Notes in Physics **31**, (1995).
9. В. В. Додонов, В. И. Манько, Труды ФИАН **183**, (1987).
10. А. Г. Майер, Е. А. Леонтович, ДАН СССР **4**, 353 (1934).
11. А. А. Харкевич, *Спектры и анализ*, М.: Физматгиз, 1962.
12. С. Н. Молотков, Письма в ЖЭТФ **74**, 477 (2001).
13. Л. Д. Ландау, Р. Пайерлс, Zeits. für Phys. **62**, 188 (1930); *Собрание трудов*, **1**, М.: Наука, 1969, p. 56.
14. D. N. Klyshko, *Photons and Nonlinear Optics*, Gordon and Breach, New York, 1988.