Письма в ЖЭТФ, том 87, вып. 1, с. 22 – 27 © 2008 г. 10 января

Преобразование Рытова в задаче о самофокусировке светового пучка

В. П. Кандидов[1)], *А. Е. Дормидонов*, *С. А. Шленов*

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, физический факультет,

и Международный учебно-научный лазерный центр, 119992 Москва, Россия

Поступила в редакцию 12 ноября 2007 г.

Предложен метод комплексной фазы огибающей светового поля для задачи о самофокусировке пучка в среде с кубичной нелинейностью. Комплексная фаза введена с помощью преобразования С.М. Рытова, краевые условия получены в предположении, что на периферии пучка световые поля при самофокусировке и линейной дифракции совпадают. Переход от медленно меняющейся амплитуды к ее комплексной фазе позволяет существенно расширить диапазон изменения амплитуды и интенсивности в световом пучке при теоретических исследованиях. Применимость метода комплексной фазы проиллюстрирована на конкретных примерах.

PACS: 42.65.–k

Явлению самофокусировки световых пучков, предсказанному в [1] и зарегистрированному в [2], посвящено немало теоретических исследований. Стационарное решение нелинейного уравнения квазиоптики относительно комплексной амплитуды светового поля в условиях самоканалирования пучка, так называемая мода Таунса, получено в [3]. В приближении заданной интенсивности определены критическая мощность и расстояние самофокусировки светового пучка [4, 5]. Перераспределение плотности мощности в сечении пучка при распространении в среде с кубичной нелинейностью изучено аналитически в [6]. Существование различных режимов распространения световых пучков в нелинейных средах определено в [7] на основе анализа интегралов движения задачи. Однако возможности аналитического исследования нелинейного уравнения квазиоптики, описывающего самофокусировку светового пучка, невелики и ограничиваются, как правило, автомодельными решениями. Для получения этих решений развито параболическое приближение [8], справедливое в приосевой области, использован метод функций Вигнера [9], применен вариационный подход [10], основывающийся на минимизации гамильтониана системы в пространстве гауссовых функций для профиля пучка. Метод моментов в [11] позволяет исследовать интегральные характеристики светового пучка в условиях самовоздействия в нелинейных средах.

Наряду с аналитическими интенсивно развивались численные методы для исследования самофокусировки световых пучков. В [12] на основе результатов численных экспериментов дана интерпретация многофокусной структуры, возникающей в пучках, мощность которых многократно превышает критическую величину. Для численного исследования самофокусировки световых пучков разработаны различные методы [13]. Гидродинамическое описание задачи самофокусировки, при котором осуществляется переход к координатам, связанным с лучевыми трубками пучка, предложено и реализовано для осесимметричного случая в [14].

Несмотря на большое разнообразие численных схем, компьютерный эксперимент, даже с использованием современных вычислительных кластеров, не может воспроизвести динамический диапазон изменения интенсивности светового поля при самофокусировке пучков в реальных условиях. Так, при филаментации фемтосекундного лазерного импульса интенсивность светового поля вследствие керровской самофокусировки возрастает на три-четыре порядка, например, в воздухе от 10^{10} до 10^{14} Вт/см^2 [15]. Импульсы тераваттной мощности вследствие пространственной неустойчивости интенсивного светового поля в среде с кубичной нелинейностью [16] распадаются на хаотическое множество филаментов, которые, взаимодействуя друг с другом, исчезают и зарождаются вновь в процессе распространения [17]. Явление филаментации фемтосекундных лазерных импульсов и сопровождающие его эффекты генерации суперконтинуума и образования плазменных каналов

[1)]e-mail: kandidov@phys.msu.ru

открывают принципиально новые возможности в широкополосном зондировании атмосферы и дистанционной эмиссионной спектроскопии, в управлении высоковольтным разрядом и создании элементов микрооптики [15]. Поэтому развитие методов решения задачи о самофокусировке светового пучка остается важным как для фундаментальных, так и прикладных исследований.

В настоящем сообщении развивается новый подход к теоретическому исследованию самофокусировки световых пучков на основе преобразования Рытова, который впервые ввел комплексную фазу амплитуды светового поля для приближенного анализа задачи о дифракции света на ультразвуковых волнах [18]. В дальнейшем метод возмущений для комплексной фазы, получивший название метода плавных возмущений, стал широко применяться в оптике случайно-неоднородных сред [19]. В развиваемом подходе рассматривается непосредственно уравнение для комплексной фазы огибающей светового пучка, решение которого осуществляется численно. Переход от медленно меняющейся амплитуды к ее комплексной фазе позволяет радикально расширить динамический диапазон изменения амплитуды и интенсивности светового поля в пучке и тем самым снять существующие ограничения в теоретических исследованиях.

Представим медленно меняющуюся амплитуду светового поля $E(x,y,z)$ в виде

$$E(x,y,z) = Ae^{\Psi(x,y,z)}, \tag{1}$$

где $A > 0$ – вещественный размерный множитель, $\Psi(x,y,z) = \operatorname{Re}\Psi + i\operatorname{Im}\Psi$ – комплексная фаза. Тогда как обычно, $E(x,y,z)$ выражается следующим образом:

$$E(x,y,z) = |E(x,y,z)|e^{iS(x,y,z)}, \tag{2}$$

где фаза $S(x,y,z)$ с точностью до множителя, волнового числа k, равна эйконалу амплитуды $E(x,y,z)$. Из сравнения (1) и (2) следует, что мнимая часть комплексной фазы $\operatorname{Im}\Psi$ совпадает с фазой $S(x,y,z)$:

$$\operatorname{Im}\Psi(x,y,z) = S(x,y,z). \tag{3}$$

Реальная часть $\operatorname{Re}\Psi$ комплексной фазы $\Psi(x,y,z)$, называемая уровнем амплитуды $\chi(x,y,z)$, связана с действительной амплитудой светового поля $|E(x,y,z)|$ простыми соотношениями:

$$\begin{gathered}\chi(x,y,z) \equiv \operatorname{Re}\Psi(x,y,z),\\ |E(x,y,z)| = Ae^{\chi(x,y,z)}.\end{gathered} \tag{4}$$

Интенсивность светового поля

$$I(x,y,z) = \frac{cn_0}{8\pi}|E|^2$$

выражается через уровень $\chi(x,y,z)$ следующим образом:

$$I(x,y,z) = A^2\frac{cn_0}{8\pi}e^{2\chi(x,y,z)}. \tag{5}$$

Преобразование, обратное (1), (4), имеет вид

$$\begin{gathered}\Psi(x,y,z) = \ln\frac{E(x,y,z)}{A},\\ \chi(x,y,z) = \ln\frac{|E(x,y,z)|}{A}.\end{gathered} \tag{6}$$

При самофокусировке пучка относительное увеличение действительной амплитуды светового поля $|E|/E_0$ составляет несколько порядков, где E_0 – начальная величина пиковой амплитуды. Вместе с тем, приращение уровня амплитуды $\chi-\chi_0$ в соответствии с логарифмической зависимостью (6) не превосходит одного порядка:

$$\begin{gathered}\chi(x,y,z) - \chi_0(x,y) = \ln\frac{|E(x,y,z)|}{|E(x,y,z=0)|},\\ \chi_0(x,y) \equiv \chi(x,y,z=0).\end{gathered} \tag{7}$$

Например, в процессе формирования филамента в фемтосекундном лазерном импульсе, действительная амплитуда светового поля $|E(x,y,z)|$ возрастает на два порядка, интенсивность $|I(x,y,z)|$ –на четыре, тогда как приращение уровня $\chi-\chi_0$ составляет не более пяти единиц.

Стационарная самофокусировка светового пучка в среде с кубичной нелинейностью описывается следующим уравнением относительно медленно меняющейся амплитуды $E(x,y,z)$:

$$2i\frac{\partial E}{\partial z} = \Delta_\perp E + R|E|^2E, \tag{8}$$

где $\triangle_\perp$ – оператор Лапласа по поперечным координатам. В уравнении (8) огибающая светового поля $E(x,y,z)$ нормирована на E_0, поперечные координаты x, y – на радиус пучка a_0, продольная координата z – на дифракционную длину $L_d = ka_0^2$. Параметр нелинейности R равен:

$$R = \frac{2kn_2}{n_0}|E_0|^2L_d, \tag{9}$$

где n_2 – коэффициент кубичной нелинейности, определяющий нелинейно-оптическое приращение показателя преломления $\Delta n = n_2|E|^2$. Подставляя (1) в (8), получаем следующее уравнение относительно комплексной фазы $\Psi(x,y,z)$:

$$2i\frac{\partial\Psi}{\partial z} = \Delta_\perp\Psi + (\nabla\Psi)^2 + R\,e^{2\chi}. \qquad (10)$$

В уравнении (8) огибающая $E(x,y,z)$ является комплексной функцией; ее реальная, $\operatorname{Re}E = |E|\cos S$, и мнимая, $\operatorname{Im}E = |E|\sin S$, части осциллируют в плоскости поперечного сечения пучка и в направлении его распространения, при этом, особенно быстро, в окрестности нелинейного фокуса. Воспроизведение быстро осциллирующих функций $\operatorname{Re}E(x,y,z)$ и $\operatorname{Im}E(x,y,z)$ является основной проблемой при решении уравнения (8). Тогда как реальная, $\operatorname{Re}\Psi(x,y,z)$, и мнимая, $\operatorname{Im}\Psi(x,y,z)$, части комплексной фазы медленно меняются при формировании нелинейного фокуса, и их вычисление при решении уравнения (10) не вызывает трудностей.

Краевые условия в задаче о самофокусировке ограниченного пучка в свободном пространстве следуют из физической картины формирования нелинейного фокуса. В идеальной постановке нелинейный фокус унимодального осесимметричного светового пучка образуется на его оси. В реальных условиях, когда существуют возмущения амплитуды и фазы на профиле пучка или пространственные флуктуации оптических свойств среды, возможно образование нескольких нелинейных фокусов в плоскости его поперечного сечения. При этом фокусы образуются в приосевой области с высокой плотностью мощности. Аберрационные возмущения светового поля, вызванные формированием нелинейных фокусов и их взаимодействием между собой, охватывают ограниченную область в поперечном сечении пучка. На периферии пучка, где интенсивность мала и доминирует дифракционная расходимость, можно считать световое поле таким же, как в линейной среде. Из этого приближения, в частности, следует, что на границе Γ конечной области D огибающая $E(x,y,z)$ ограниченного пучка равна нулю, если размер области D значительно превышает его радиус a_0.

Для уравнения (10) краевое условие для комплексной фазы является нестационарным, поскольку фаза $\Psi(x,y,z)$ на границе Γ зависит от z – эволюционной переменной задачи. Получим краевое условие для $\Psi(x,y,z)$ из асимптотического продолжения светового поля на границе Γ, положив, что вне области D световое поле при самофокусировке пучка совпадает с полем в линейной среде. Отсюда, фаза $\Psi(x,y,z)$ на границе Γ равна комплексной фазе светового пучка при линейной дифракции $\Psi_d(x,y,z)$:

$$\Psi(x|_\Gamma, y|_\Gamma, z) = \Psi_d(x|_\Gamma, y|_\Gamma, z). \qquad (11)$$

Фаза $\Psi_d(x,y,z)$ рассматриваемого пучка может быть получена аналитически или численно. Например, для коллимированного гауссового пучка при дифракции в линейной среде известно аналитическое выражение для огибающей $E(x,y,z)$ [20] и, следовательно, для комплексной фазы $\Psi_d(x,y,z)$:

$$\Psi_d(x,y,z) = -\frac{1}{2}\ln(1+z^2) - \\ -\frac{x^2+y^2}{2(1+z^2)}(1+iz) + i\,\mathrm{arctg}z. \qquad (12)$$

Это позволяет записать в явном виде краевое условие (11) для комплексной фазы $\Psi(x|_\Gamma, y|_\Gamma, z)$. Аналогично можно сформулировать краевые условия для комплексной фазы $\Psi(x,y,z)$ сфокусированного пучка, либо перейти, если необходимо, к условиям второго или третьего рода на границе Γ рассматриваемой области.

При самофокусировке пучка сохраняются его мощность P и гамильтониан H [7, 20]. Через уровень амплитуды $\chi(x,y,z)$ и комплексную фазу $\Psi(x,y,z)$ интегралы движения задачи записываются следующим образом:

$$P = \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\chi}\,dxdy, \\ H = \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\chi}\left(|\nabla_\perp\Psi|^2 - R\,e^{2\chi}\right)dxdy. \qquad (13)$$

Таким образом, развиваемый метод комплексной фазы состоит в преобразовании Рытова, с помощью которого осуществляется переход от огибающей светового поля $E(x,y,z)$ к ее комплексной фазе $\Psi(x,y,z)$, и в формулировке краевых условий из асимптотического продолжения светового поля на границе рассматриваемой области в приближении линейной дифракции. В методе комплексной фазы нелинейное уравнение (10) с краевыми условиями (11) и заданным начальным распределением $\Psi(x,y,z=0)$ решается численно с помощью стандартных алгоритмов для уравнений в частных производных.

Для иллюстрации метода комплексной фазы в задачах самофокусировки рассмотрим коллимированный пучок гауссового профиля. В этом случае огибающая светового поля в пучке задается в виде

$$E(x,y,z=0) = E_0\exp\left\{-\frac{x^2+y^2}{2a_0^2}\right\}. \qquad (14)$$

Начальное распределение комплексной фазы $\Psi_0(x,y) = \Psi(x,y,z=0)$ является действительным и в безразмерных переменных при множителе $A = E_0$ записывается следующим образом:

$$\Psi_0(x,y) = -(x^2+y^2)/2. \qquad (15)$$

Начальный уровень амплитуды $\chi_0(x,y)$ совпадает с $\Psi_0(x,y)$, начальная фаза $S_0(x,y)$ равна нулю. Параметр нелинейности $R = 37.7$, что соответствует мощности пучка P, в десять раз превышающей критическую мощность самофокусировки P_{cr}. На рис.1а представлены профили фазы $S(x, y = 0, z)$ и уровня амплитуды $\chi(x, y = 0, z)$ в зависимости от поперечной координаты x и при $y = 0$ в плоскости $z^* \le z_{sf}$, где z_{sf} – расстояние самофокусировки. Величина z_{sf}, рассчитанная по [21], составляет $z_{sf} = 0.161L_d$. Расстояние до рассматриваемой плоскости равно $z^* = 0.156L_d$. Там же приведены начальные профили фазы $S_0(x, y = 0)$ и уровня $\chi_0(x, y = 0)$. Видно, что первоначально плоская фаза $S_0(x)$ превращается на расстоянии z^* в функцию с минимумом на оси, отражающим отставание фазы светового поля из-за керровской нелинейности, и с параболической зависимостью на периферии пучка, обусловленной его дифракционной расходимостью. Начальный профиль уровня $\chi_0(x)$, согласно (15), является параболическим, и $\chi_0(x = 0, y = 0) = 0$. При самофокусировке на профиле $\chi(x)$ появляется узкий максимум на оси, равный наибольшему приращению уровня, которое составляет около 4.5. Тогда как интенсивность на оси пучка увеличивается более чем на три порядка, $I(0,0,z^*)/I_0 \sim 5\cdot 10^3$. При этом плавному изменению уровня $\chi(x)$ в сечении пучка соответствуют большие градиенты на профиле интенсивности $I(x)$, который имеет вид узкого пика с шириной, неразрешимой в масштабе рис.1.

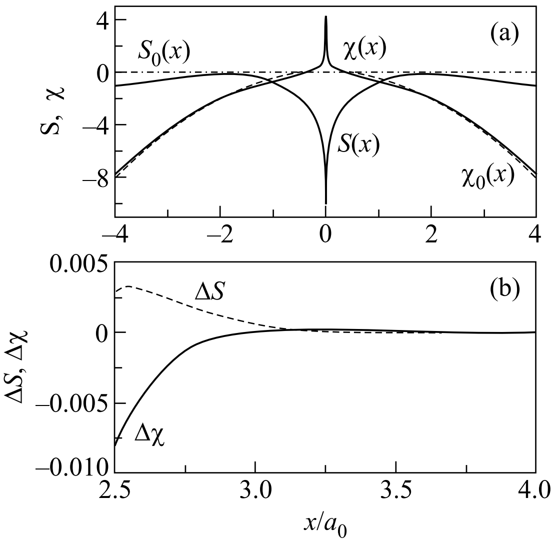

Рис.1. Самофокусировка коллимированного гауссового пучка мощностью $P = 10P_{cr}$. (a) Профили фазы S и уровня амплитуды χ: $S(x, y = 0, z^*)$ и $\chi(x, y = 0, z^*)$ на расстоянии $z^* = 0.156L_d$, близком к расстоянию самофокусировки, – сплошные линии; начальные $S_0(x, y = 0)$ и $\chi_0(x, y = 0)$ при $z = 0$ – пунктирные линии; (b) Отклонения фазы $\Delta S(x, y, z^*)$ (пунктирная линия) и уровня $\Delta\chi(x, y, z^*)$ (сплошная кривая) в условиях самофокусировки пучка от фазы $S_d(x, y = 0, z^*)$ и уровня $\chi_d(x, y = 0, z^*)$ при его линейной дифракции на том же расстоянии z^* в окрестности границы Г

В целом изменение фазы $S(x,y,z^*)$ и уровня $\chi(x,y,z^*)$ охватывает диапазон от $+5$ до -10 в рассматриваемой области D поперечного сечения пучка. Мощность P при самофокусировке пучка с рассматриваемыми параметрами сохраняется с точностью не хуже 0.3%, относительное изменение гамильтониана H составляет 4% при увеличении интенсивности в десять раз. Отклонения интегралов движения существенно замедляются с измельчением шага Δx, Δy расчетной сетки.

Заметим, что увеличение интенсивности более чем на три порядка получено при численном решении уравнения (10) для комплексной фазы $\Psi(x,y,z)$ на расчетной сетке с шагом Δx, $\Delta y = 0.02a_0$ в плоскости поперечного сечения пучка. Тогда как на такой сетке при решении уравнения (8) относительно огибающей $E(x,y,z)$ после возрастания интенсивности на два порядка развивается вычислительная неустойчивость.

Приведенные результаты получены на квадратной области D со стороной, равной $8a_0$. Для оценки погрешности, которую вносит асимптотическое продолжение комплексной фазы (11), рассмотрим в окрестности границы Г отклонения уровня $\Delta\chi(x,y,z)$ и фазы $\Delta S(x,y,z)$ в условиях самофокусировки пучка от уровня $\chi_d(x,y,z)$ и фазы $S_d(x,y,z)$ при его линейной дифракции:

$$\begin{aligned}\Delta\chi(x,y,z) &= \chi(x,y,z) - \chi_d(x,y,z),\\ \Delta S(x,y,z) &= S(x,y,z) - S_d(x,y,z),\end{aligned} \qquad (16)$$

где $\chi_d(x,y,z) = \operatorname{Re}\Psi_d(x,y,z)$, $S_d(x,y,z) = \operatorname{Im}\Psi_d(x,y,z)$ вычисляются из (12). На периферии пучка с приближением к границе Г отклонения уровня $\Delta\chi(x,y,z)$ и фазы $\Delta S(x,y,z)$ быстро убывают (рис.1b). Величина их относительного отклонения не превышает $10^{-3}\%$ внутри области D на расстоянии $0.5a_0$ от границы Г.

Для анализа применимости метода комплексной фазы в более общем случае рассмотрим пучок с локальным возмущением интенсивности, нарушающим его осевую симметрию. При этом для простоты примем, что на границе области комплексная фаза $\Psi(x|_\Gamma, y|_\Gamma, z)$ при самофокусировке совпадает с фазой $\Psi_d(x|_\Gamma, y|_\Gamma, z)$ (12) при линейной дифракции осесимметричного пучка. Профиль начального распределения интенсивности $I(x, y = 0, z = 0)/I_0$ в сечении, проходящем через экстремумы распределения, изображен на рис.2a. Начальная фаза S_0 равна нулю. Мощность пучка в 10.5 раз превышает критическую мощность самофокусировки, введенную, заметим, для гауссового пучка. В рассматриваемом пучке образуются два нелинейных фокуса. При этом в одном из них интенсивность нарастает быстрее. На некотором расстоянии z' максимум интенсивности в этом фокусе достигает $2 \cdot 10^2 I_0$, тогда как в другом – на порядок меньше (рис.2b). Это различие в величине их интенсивности стремительно нарастает с приближением к коллапсу в одном из фокусов. Формированию нелинейных фокусов в пучке соответствует образование двух экстремумов на профилях фазы $S(x, y = 0, z')$ и уровня $\chi(x, y = 0, z')$ (рис.2c). При этом, в отличие от интенсивности, оба экстремума, как на профиле фазы, так и уровня, близки по величине, что повышает надежность получаемых результатов.

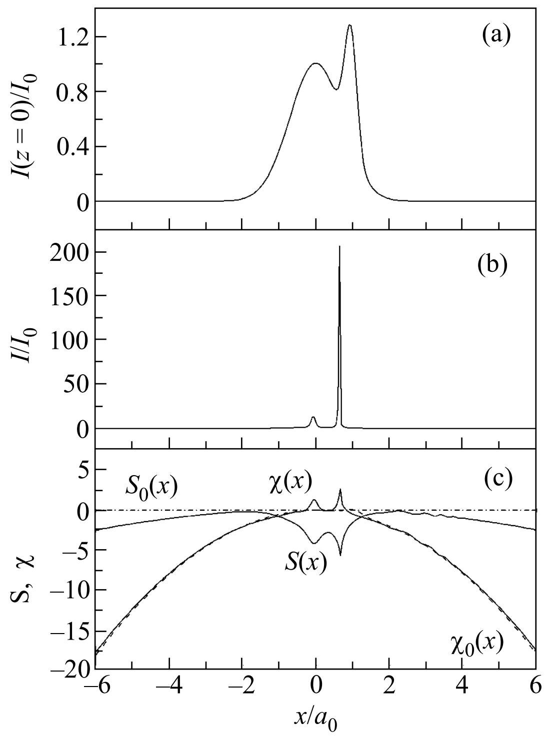

Рис.2. Формирование нелинейных фокусов в пучке с асимметричным распределением интенсивности при мощности $P = 10.5P_{cr}$. (a) Профиль начального распределения интенсивности $I(x, y = 0, z = 0)/I_0$; (b) профиль интенсивности $I(x, y = 0, z')$ на расстоянии z', где интенсивность в одном из нелинейных фокусов в 200 раз превышает начальную величину I_0 на оси пучка; (c) профили фазы S и уровня амплитуды χ: $S(x, y = 0, z')$ и $\chi(x, y = 0, z')$ на расстоянии z' – сплошные линии; $S_0(x, y = 0)$ и $\chi_0(x, y = 0)$ при $z = 0$ – пунктирные

Интерференция возмущений от формирующихся нелинейных фокусов порождает осцилляции уровня и фазы на периферии пучка (рис.2c). Однако с приближением к границе рассматриваемой области осцилляции затухают и доминирует дифракционная расходимость излучения, при которой уровень и фаза имеют параболическую зависимость в плоскости поперечного сечения. Несмотря на существенную асимметрию рассматриваемой задачи, погрешность асимптотического продолжения для комплексной фазы $\Psi(x, y, z)$, получаемого из решения линейного уравнения дифракции для осесимметричного гауссового пучка, не превышает $10^{-3}\%$ для уровня и фазы внутри области D на расстоянии $x = 0.5a_0$ от границы Г.

Метод комплексной фазы, который включает переход от огибающей светового поля $E(x, y, z)$ к ее комплексной фазе $\Psi(x, y, z)$ посредством преобразования Рытова и формулировку краевых условий на основе асимптотического продолжения фазы на периферии пучка может быть применен для решения задач взаимодействия лазерного излучения с нелинейными средами.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант # 06-02-08004-офи.

1. Г. А. Аскарьян, ЖЭТФ **42**, 1567 (1962).
2. Н. Ф. Пилипецкий, А. Р. Рустамов, Письма в ЖЭТФ **2**, 88 (1965).
3. R. Chiao, E. Garmire, and C. Townes, Phys. Rev. Lett. **13**, 479 (1964).
4. P. L. Kelley, Phys. Rev. Lett. **13**, 1005 (1965).
5. В. И. Таланов, Письма в ЖЭТФ **2**, 218 (1965).
6. В. Н. Луговой, ДАН СССР **176**, 58 (1967).
7. В. Е. Захаров, В. В. Соболев, В. С. Сынах, ЖЭТФ **60**, 136 (1971).
8. С. А. Ахманов, А. П. Сухоруков, Р. В. Хохлов, УФН **93**, 19 (1967).
9. В. В. Коробкин, В. Н. Сазонов, ЖЭТФ **81**, 1195 (1981).
10. В. В. Воробьев, Изв. вузов, радиофизика **13**, 1905 (1970).
11. С. Н. Власов, В. А. Петрищев, В. И. Таланов, Изв. вузов, радиофизика **14**, 1351 (1971).
12. А. Л. Дышко, В. Н. Луговой, А. М. Прохоров, Письма в ЖЭТФ **6**, 636 (1967).
13. Ю. Н. Карамзин, А. П. Сухоруков, В. А. Трофимов, *Математическое моделирование в нелинейной оптике*, Изд-во МГУ, 1989.

14. Л. М. Дегтярев, В. В. Крылов, ЖВМ и МФ **17**, 1523 (1977).
15. J. Kasparian, M. Rodrigues, G. Mejean et al., Science **301**, 61 (2003).
16. В. И. Беспалов, А. Г. Литвак, В. И. Таланов, Сб. *Нелинейная оптика*, Новосибирск: Наука, 1968, с. 428.
17. S. A. Hosseini, Q. Luo, B. Ferland et al., PRA **70**, 033802 (2004).
18. С. М. Рытов, Изв. АН СССР **2**, 221 (1937).
19. С. М. Рытов, Ю. А. Кравцов, В. И. Татарский, *Введение в статистическую радиофизику*, ч. 2, *Случайные поля*, М.: Наука, 1978.
20. М. Б. Виноградова, О. В. Руденко, А. П. Сухоруков, *Теория волн*, М.: Наука, 1990.
21. J. H. Marburger, Prog. Quant. Electr. (Printed in Great Britain: Pergamon Press) **4**, 35 (1975).