

Пространственная группировка и антигруппировка рекомбинаций в фермионной среде с парными квантовыми корреляциями

Л. В. Ильичев^{*1)}, С. В. Анищик⁺

^{*}Институт автоматики и электрометрии Сибирского отд. РАН, 630090 Новосибирск, Россия

⁺Институт химической кинетики и горения Сибирского отд. РАН, 630090 Новосибирск, Россия

Поступила в редакцию 22 октября 2007 г.

После переработки 20 ноября 2007 г.

Для модельного квантового состояния, построенного из синглетных фермионных пар, рассмотрено явление пространственной корреляции событий рекомбинации. Обнаружена конкуренция фактора ферми-статистики, приводящей к антигруппировке рекомбинаций, и феномена переброса зацепленности, порождающего тенденцию группировки событий.

PACS: 03.65.Ud, 71.45.Gm

Исследование кинетики рождения, эволюции и рекомбинации радикальных пар является одним из важнейших направлений химической физики магнитных и спиновых эффектов [1, 2].

Во многих случаях акты рождения и рекомбинации радикальных пар осуществляются по синглетному каналу (оба радикала имеют спин, равный $1/2$). При этом миграция радикалов приводит к появлению, помимо так называемой геминальной рекомбинации, в которой участвуют радикалы, родившиеся в одном акте диссоциации, также и кросс-рекомбинации. События кросс-рекомбинации сопровождаются явлением, известным ныне как переброс зацепленности [3]. На этот процесс обратил внимание Броклхерст в работе [4]. Суть рассмотренного им явления такова. Если миграция частиц не воздействует на направление спинов родившейся пары радикалов, то эта пара остается в синглетном состоянии. При встрече и кросс-рекомбинации фрагментов $\{2, 3\}$ из двух разных синглетных пар $\{1, 2\}$ и $\{3, 4\}$ оставшаяся пара фрагментов $\{1, 4\}$ оказывается в синглетном состоянии, что следует из закона сохранения суммарного нулевого спина двух пар. Заметим, что априорное спиновое состояние пары $\{1, 4\}$ до рекомбинации радикалов 2 и 3 было максимально смешанным и, естественно, не содержало никаких корреляций. Таким образом, в результате акта рекомбинации произошел переброс синглетности (как частной формы зацепленности) внутри четверки частиц $\{1, 2, 3, 4\}$ с пар $\{1, 2\}$ и $\{3, 4\}$ на новые пары $\{2, 3\}$ и $\{1, 4\}$. Первая из новых пар, превратившись в продукт рекомбинации, выбывает из даль-

нейшего рассмотрения, а пара $\{1, 4\}$ продолжает существовать в среде. Она может принять участие в новом акте переброса зацепленности при рекомбинации одного из ее фрагментов или, при встрече радикалов 1 и 4, эта пара рекомбинирует с единичной вероятностью. Для дальнейшего важно отметить, что в последнем случае единичная вероятность события рекомбинации частиц 1 и 4 оказалась обусловленной рекомбинацией пары $\{2, 3\}$. Из этого обстоятельства можно заключить, что переброс зацепленности должен приводить к явлению пространственной группировки событий рекомбинации. Под этим термином понимают такой тип корреляций пар событий, при котором появление одного события увеличивает вероятность другого.

Из результатов работ [5, 6], где инициированное рекомбинациями явление переброса зацепленности трактуется как специфический нелокальный тип химической реакции, следует вывод, что для корректного описания переброса зацепленности желательно иметь дело с эволюцией состояния квантовой многочастичной системы. На этом пути, помимо вывода квантового кинетического уравнения или выбора его подходящей модели, имеются более простые, но важные проблемы иного рода. В частности, представляет интерес связь между пространственными корреляциями рекомбинационных событий и свойствами квантового многочастичного состояния. Для исследования этой связи нет необходимости в решении кинетического уравнения, и в такой упрощающей постановке можно отвлечься от способа приготовления исследуемого квантового состояния, от его эволюции и, в частности, от взаимодействия между радикалами, не затрагивающего их спины [7].

¹⁾e-mail: leonid@iae.nsk.su

В настоящей работе для выявления указанной связи используется простое модельное квантовое состояние, в явном виде построенное из синглетных пар фермионов. Выбранный тип статистики, порождающий тенденцию к пространственной антигруппировке любых событий с участием фермионов, должен, как представляется, вступить в конкуренцию с явлением переброса зацепленности, стремящимся сгруппировать события. Как будет показано в работе, такая конкуренция действительно имеет место. С этой точки зрения система фермионов более интересна, чем система бозонов, так как в последней оба механизма, статистика и переброс зацепленности, приводят к группировке.

Будут рассмотрены как ситуация построения синглетных пар из фермионов одного типа, так и случай, когда пары образованы радикалами – фермионами разных типов. Это позволит выделить из общего параметра, описывающего пространственную корреляцию событий рекомбинации, часть, обусловленную статистикой частиц и сравнить ее со вкладом механизма переброса зацепленности.

Выбранный уровень описания с использованием формализма вторичного квантования делает рассматриваемую модель и полученные результаты интересными также с точки зрения физики протяженных конденсированных квантовых систем, в частности, в процессах получения молекулярных бозе-конденсатов.

Описание модели. Введем операторы уничтожения $\hat{\alpha}_\sigma(x)$, $\hat{\beta}_\sigma(x)$, и рождения, $\hat{\alpha}_\sigma^\dagger(x)$, $\hat{\beta}_\sigma^\dagger(x)$ для двух типов фермионов; $\sigma = \pm 1$ – значение удвоенной проекции спина на выделенную ось. Оператор уничтожения синглетной пары с фрагментами, находящимися в точках x_1 и x_2 (для простой системы считается одномерной), имеет следующий вид для ситуации с фермионами одного типа (α):

$$\hat{\Upsilon}_{\alpha\alpha}(x_1, x_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}[\hat{\alpha}_+(x_1)\hat{\alpha}_-(x_2) - \hat{\alpha}_-(x_1)\hat{\alpha}_+(x_2)] \quad (1)$$

и для ситуации с фермионами разных типов:

$$\hat{\Upsilon}_{\alpha\beta}(x_1, x_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}[\hat{\alpha}_+(x_1)\hat{\beta}_-(x_2) - \hat{\alpha}_-(x_1)\hat{\beta}_+(x_2)] \quad (2)$$

Взгляд на спиновые радикалы как на бесструктурные фермионы, принятый в настоящей работе, является крайним упрощением ситуации. Игнорируется обширное множество параметров, специфицирующих частицы. В частности, рассматривается случай немагнитных ядер. В этом случае отсутствует спиновая эволюция в когерентных парах.

Нас будет интересовать изменение состояния $\hat{\varrho}$ многочастичной квантовой системы в результате рекомбинации синглетной пары в точке x :

$$\hat{\varrho} \mapsto \hat{\Upsilon}(x, x)\hat{\varrho}\hat{\Upsilon}^\dagger(x, x). \quad (3)$$

Здесь $\hat{\Upsilon}(x, x)$ символизирует оператор $\hat{\Upsilon}_{\alpha\alpha}(x, x)$ или $\hat{\Upsilon}_{\alpha\beta}(x, x)$ в зависимости от ситуации. След правой части (3) $Tr \hat{\Upsilon}^\dagger(x, x)\hat{\Upsilon}(x, x)\hat{\varrho} \equiv \langle \hat{\Upsilon}^\dagger(x, x)\hat{\Upsilon}(x, x) \rangle$ как функция от x задает пространственное распределение вероятности события рекомбинации. Пространственную корреляцию двух событий рекомбинации мы будем описывать с помощью параметра

$$\gamma(x_1, x_2) = \frac{\langle \hat{\Upsilon}^\dagger(x_1, x_1)\hat{\Upsilon}^\dagger(x_2, x_2)\hat{\Upsilon}(x_2, x_2)\hat{\Upsilon}(x_1, x_1) \rangle}{\langle \hat{\Upsilon}^\dagger(x_1, x_1)\hat{\Upsilon}(x_1, x_1) \rangle \langle \hat{\Upsilon}^\dagger(x_2, x_2)\hat{\Upsilon}(x_2, x_2) \rangle}. \quad (4)$$

В числителе правой части стоит величина, пропорциональная совместной плотности вероятности рекомбинаций в точках x_1 и x_2 . Знаменатель образован произведением однособытийных распределений. Таким образом, если $\gamma(x_1, x_2) > 1$, то факт рекомбинации в одной точке увеличивает вероятность рекомбинации в другой – имеет место группировка событий для точек x_1 и x_2 . Аналогично, в случае $\gamma(x_1, x_2) < 1$ имеет место антигруппировка.

В качестве модельного квантового состояния многочастичной системы возьмем следующее:

$$\hat{\varrho} = |\Xi\rangle\langle\Xi|, \quad (5)$$

где

$$|\Xi\rangle = \hat{\Xi}|vac\rangle, \quad (6)$$

$|vac\rangle$ – вакуумное состояние; унитарный оператор $\hat{\Xi}$ в случае фермионов одного типа имеет вид

$$\hat{\Xi}_{\alpha\alpha} = \exp \left[\frac{1}{2} \int \psi(x_1, x_2) \hat{\Upsilon}_{\alpha\alpha}^\dagger(x_1, x_2) dx_1 dx_2 - \frac{1}{2} \int \bar{\psi}(x_1, x_2) \hat{\Upsilon}_{\alpha\alpha}(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \right], \quad (7)$$

а в случае фермионов разных типов –

$$\hat{\Xi}_{\alpha\beta} = \exp \left[\int \psi(x_1, x_2) \hat{\Upsilon}_{\alpha\beta}^\dagger(x_1, x_2) dx_1 dx_2 - \int \bar{\psi}(x_1, x_2) \hat{\Upsilon}_{\alpha\beta}(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \right]. \quad (8)$$

Небольшое различие в форме операторов $\hat{\Xi}_{\alpha\alpha}$ и $\hat{\Xi}_{\alpha\beta}$ продиктовано удобством единообразия записи будущих выражений; черта над символом обозначает комплексное сопряжение. Операторы (7) и (8) являются функционалами комплексной амплитуды

ды $\psi(x_1, x_2)$, задающей распределение синглетных пар [8].

При вычислении средних величин операторных выражений, входящих в параметр $\gamma(x_1, x_2)$, можно перейти к усреднению по вакуумному состоянию соответствующих комбинаций преобразованных операторов:

$$\hat{\Xi}_{\alpha\alpha}^{-1} \hat{\alpha}_\sigma(x) \hat{\Xi}_{\alpha\alpha} = \int [C(x, y) \hat{\alpha}_\sigma(y) + S(x, y) \hat{\alpha}_{-\sigma}^\dagger(y)] dy;$$

$$\hat{\Xi}_{\alpha\beta}^{-1} \hat{\alpha}_\sigma(x) \hat{\Xi}_{\alpha\beta} = \int [C(x, y) \hat{\alpha}_\sigma(y) + \sigma S(x, y) \hat{\beta}_{-\sigma}^\dagger(y)] dy; \quad (9)$$

$$\hat{\Xi}_{\alpha\beta}^{-1} \hat{\beta}_\sigma(x) \hat{\Xi}_{\alpha\beta} = \int [C(x, y) \hat{\beta}_\sigma(y) - \sigma S(x, y) \hat{\alpha}_{-\sigma}^\dagger(y)] dy$$

Здесь

$$C(x, y) = \delta(x - y) - \frac{1}{2!} \int \psi(x, y_1) \bar{\psi}(y_1, y) dy_1 + \dots; \quad (10)$$

$$S(x, y) = \psi(x, y) - \frac{1}{3!} \int \psi(x, y_1) \bar{\psi}(y_1, y_2) \psi(y_2, y) dy_1 dy_2 + \dots$$

Эти ряды аналогичны степенным разложениям косинуса и синуса.

С помощью соотношений (9) нетрудно определить, как в результате рекомбинации меняется состояние $|\Xi\rangle$. Например, в случае фермионов одного типа имеем:

$$\hat{\Upsilon}_{\alpha\alpha}(x, x) |\Xi_{\alpha\alpha}\rangle = \sqrt{2} \int C(x, y) S(x, y) dy |\Xi_{\alpha\alpha}\rangle + \int S(x, y_1) S(x, y_2) \hat{\Xi}_{\alpha\alpha} \hat{\Upsilon}_{\alpha\alpha}^\dagger(y_1, y_2) |vac\rangle dy_1 dy_2. \quad (11)$$

Второе слагаемое в правой части отражает эффект переброса зацепленности – возникновение синглетной пары с компонентами в точках y_1 и y_2 при рекомбинации в точке x .

Согласно определению (1) и антикоммутиративным свойствам фермиевских операторов $\hat{\Upsilon}_{\alpha\alpha}(x_1, x_2) = \hat{\Upsilon}_{\alpha\alpha}(x_2, x_1)$. Следовательно, функцию $\psi(x_1, x_2)$ также можно считать инвариантной относительно перестановки аргументов: $\psi(x_1, x_2) = \psi(x_2, x_1)$. Если предположить пространственную однородность системы, то $\psi(x_1, x_2)$ есть функция от разности координат. Вместе со свойством симметричности это свойство диктует зависимость от $|x_1 - x_2|$. Выберем гауссову форму для $\psi(x_1, x_2)$:

$$\psi(x_1, x_2) = \psi(x_1 - x_2) = \frac{\psi}{\sqrt{\Delta}} \cdot \exp\left[-\frac{(x_1 - x_2)^2}{\Delta}\right]. \quad (12)$$

Без ограничения общности можно считать параметр ψ действительным. От него зависит плотность пар и, следовательно, среднее расстояние между частицами. Из (10) и (12) имеем

$$C(x, y) = C(x - y) = \quad (13)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(\psi\sqrt{\pi})^{2n}}{(2n)! \sqrt{2n\pi\Delta}} \exp\left[-\frac{(x-y)^2}{2n\Delta}\right]$$

и

$$S(x, y) = S(x - y) = \quad (14)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(\psi\sqrt{\pi})^{2n+1}}{(2n+1)! \sqrt{(2n+1)\pi\Delta}} \exp\left[-\frac{(x-y)^2}{(2n+1)\Delta}\right].$$

Параметр (4) также оказывается зависящим только от разности координат событий: $\gamma(x_1, x_2) = \gamma(x_1 - x_2)$, а знаменатель отношения в правой части (4) вообще не зависит от координат. Мы вычислим этот параметр для трех ситуаций: 1) $\gamma_{\alpha\alpha}(x)$ для синглетной рекомбинации фермионов одного типа, 2) $\gamma_{\alpha\beta}(x)$ для случая синглетной рекомбинации фермионов разных типов и 3) $\tilde{\gamma}_{\alpha\beta}(x)$ для случая рекомбинации фермионов разных типов при полной нечувствительности к спине пары. Рассмотрение последнего случая позволяет “отключить” переброс зацепленности и иницируемую им группировку событий. Ситуации 1) и 2) соответствуют эксперименту с диссоциацией возбужденной молекулы на радикальные фрагменты с последующей рекомбинацией. Ситуация 3) характерна для рекомбинации ион-радикалов в неполярной среде. Преобразование состояния системы при такой рекомбинации имеет, в отличие от (3), следующий вид:

$$\hat{\varrho} \mapsto \mathcal{R}_x[\hat{\varrho}] \equiv \frac{1}{4} \sum_{\sigma, \sigma'} \hat{\alpha}_\sigma(x) \hat{\beta}_{\sigma'}(x) \hat{\varrho} \hat{\beta}_{\sigma'}^\dagger(x) \hat{\alpha}_\sigma^\dagger(x). \quad (15)$$

Определенная таким образом операция \mathcal{R}_x позволяет записать параметр $\tilde{\gamma}_{\alpha\beta}(x)$ как

$$\tilde{\gamma}_{\alpha\beta}(x_1 - x_2) = \frac{\text{Tr } \mathcal{R}_{x_2}[\mathcal{R}_{x_1}[\hat{\varrho}]]}{\text{Tr } \mathcal{R}_{x_1}[\hat{\varrho}] \cdot \text{Tr } \mathcal{R}_{x_2}[\hat{\varrho}]}. \quad (16)$$

Результаты. Для параметра $\gamma_{\alpha\alpha}(x)$ получаем

$$\gamma_{\alpha\alpha}(x) = \left([F^2(0) + F^2(x)]^2 + \right. \quad (17)$$

$$\left. + 2F^2(0)[G^2(0) + G^2(x)]^2 + 2F^2(x)[G^2(0) - G^2(x)]^2 + \right.$$

$$\left. + [G^2(0) - G^2(x)]^2 \right) [F^2(0) + G^2(0)]^{-2}.$$

Здесь введены функции

$$F(x) \equiv \int C(x+y)S(y)dy =$$

$$= \frac{\psi}{\sqrt{\Delta}} \sum_{n,m=0}^{\infty} (-1)^{n+m} \frac{(\psi\sqrt{\pi})^{2(n+m)}}{(2n)!(2m+1)!\sqrt{2m+2n+1}} \times \exp\left[-\frac{x^2}{(2m+2n+1)\Delta}\right] \quad (18)$$

и

$$G(x) \equiv \int S(x+y)S(y)dy = \sum_{n,m=0}^{\infty} (-1)^{n+m} \frac{(\psi\sqrt{\pi})^{2(n+m+1)}}{(2n+1)!(2m+1)!\sqrt{2(m+n+1)\Delta}} \times \exp\left[-\frac{x^2}{2(m+n+1)\Delta}\right]. \quad (19)$$

Аналогично для $\gamma_{\alpha\beta}(x)$:

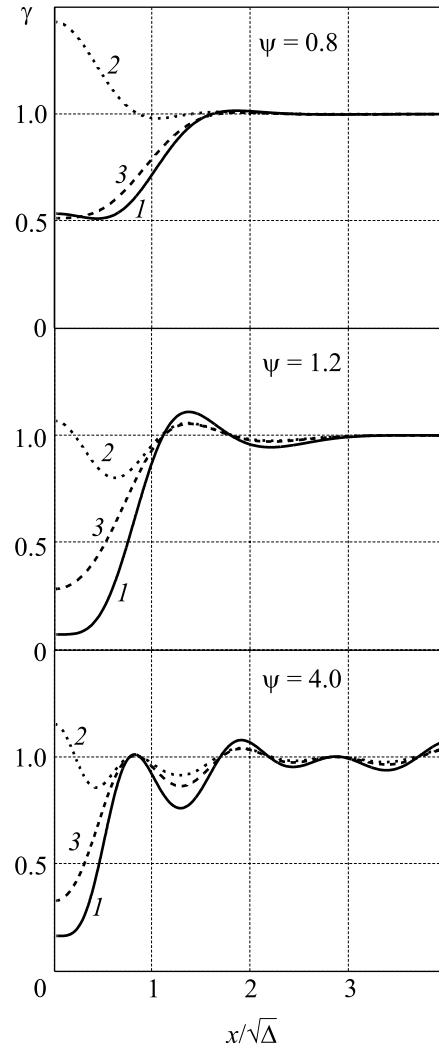
$$\gamma_{\alpha\beta}(x) = \left([2F^2(0) + F^2(x)]^2 + 4F^2(0)[G^2(0) + G^2(x)]^2 + F^2(x)[G^2(0) - G^2(x)]^2 + G^4(0) - G^2(x)G^2(x) + G^4(x) \right) [2F^2(0) + G^2(0)]^{-2}, \quad (20)$$

и $\tilde{\gamma}_{\alpha\beta}(x)$:

$$\tilde{\gamma}_{\alpha\beta}(x) = \left([F^2(0) + 2G^2(0)]^2 - 8G^4(0) + [G^2(0) - 2G^2(x)]^2 + [F^2(x) + 2G^2(0)]^2 + 0.5F^2(0)G^2(x) + F(0)G(0)F(x)G(x) - F^2(x)G^2(x) + F^2(0)F^2(x) \right) [F^2(0) + 2G^2(0)]^{-2}. \quad (21)$$

Результаты расчета параметров группировки представлены на рисунке.

Обсуждение. Форма кривых для $\gamma_{\alpha\alpha}(x)$ и $\gamma_{\alpha\beta}(x)$ при $\psi = 0.8$ обнаруживает проявление эффекта переброса зацепленности при малых значениях x . Наиболее ярко это заметно в поведении $\gamma_{\alpha\beta}(x)$ – имеет место группировка рекомбинаций, в то время как на форме кривой для $\gamma_{\alpha\alpha}(x)$ переброс зацепленности отразился в виде некоторого смещения минимума в сторону ненулевых расстояний. Такое различие поведений кривых следует отнести к значительно более сильному проявлению фактора ферми-статистики при рекомбинации пары фермионов одного типа. В этом случае исключается нахождение других частиц вблизи места рекомбинации в отличие от случая рекомбинации пары различающихся фермионов, оставляющего возможность нахождения вблизи частиц соответствующего типа, но с противоположным направлением спинов. Разная степень



Параметры группировки для разных значений ψ . Кривая 1 – параметр $\gamma_{\alpha\alpha}$ для случая рекомбинации пары идентичных фермионов по синглетному каналу; кривая 2 – параметр $\gamma_{\alpha\beta}$ для случая рекомбинации двух различных фермионов по синглетному каналу; кривая 3 – параметр $\tilde{\gamma}_{\alpha\beta}$ для случая рекомбинации двух различных фермионов независимо от спинов

антигруппировки из-за эффекта ферми-статистики для $\alpha\alpha$ - и $\alpha\beta$ -случаев иллюстрируется сравнением поведения кривых $\gamma_{\alpha\alpha}(x)$ и $\tilde{\gamma}_{\alpha\beta}(x)$ (кривые 1 и 3). Последняя кривая отражает эффект статистики без примеси эффекта переброса зацепленности. Такое разделение эффектов невозможно для случая $\alpha\alpha$ -рекомбинации, так как синглетный канал является единственно возможным для локализованной рекомбинации пары идентичных фермионов.

Переход от значения параметра $\psi = 0.8$ к $\psi = 1.2$ приводит, как видно из сравнения кривых 3, к более сильному проявлению эффекта ферми-статистики. В

то же время, как видно из практически одинакового расхождения кривых 2 и 3 в нуле, фактор группировки из-за переброса синглетности изменился не так сильно. Представленные численные результаты демонстрируют слияние кривых $\gamma_{\alpha\beta}(x)$ и $\tilde{\gamma}_{\alpha\beta}(x)$ с увеличением расстояния между событиями рекомбинации. Это, очевидно, отвечает диапазону, где эффект переброса зацепленности не проявляется. Поэтому тенденция к группировке при $x \simeq 1.5\sqrt{\Delta}$ для всех кривых на графике при $\psi = 1.2$ не может быть объяснена данным эффектом. Имеет место группировка, обусловленная дополнительным третьим фактором, связанным с особенностью структуры исследуемого состояния $|\Xi\rangle$. Эта особенность состоит в наличии на расстоянии $\sim \sqrt{\Delta}$ от каждой частицы ее партнера. Спиновый фактор в данном обстоятельстве уже не играет никакой роли, как следует из поведения $\tilde{\gamma}_{\alpha\beta}(x)$. Увеличение параметра ψ (сокращение расстояния между частицами) приводит, как видно из нижнего графика, к появлению аналогичных диапазонов при больших расстояниях между событиями. Осцилляционное поведение всех трех кривых довольно неожиданно. Возможно, осцилляции параметра $\gamma(x)$ при увеличении ψ есть проявление эффектов, родственных “естественной зацепленности”, возникающей в ансамблях невзаимодействующих фермионов [9].

Резюмируя, можно констатировать наличие ожидаемой конкуренции тенденций группировки и антигруппировки, привносимых, соответственно, механизмом переброса зацепленности и спецификой ферми-статистики. Данная картина оказалась несколько усложненной наличием группировки вследствие третьего фактора, отмеченного выше.

В работе исследовано квантовое состояние на предмет группировки событий рекомбинации. Как уже отмечалось выше, это не является полноценным решением задачи об эволюции системы частиц, сопровождающейся рекомбинациями. В нашей модели отсутствует динамика (как до рекомбинаций, так и между ними). Рассмотренной постановке наиболее близко соответствует ситуация, когда в выбранных точках системы искусственно создаются условия для рекомбинации. Определяется вероятность парных рекомбинаций с фиксированным расстоянием между ними и относится к произведению вероятностей однократных рекомбинаций в выбранных точках.

В рассмотренной модели использовалось конкретное квантовое состояние частного вида. Представляется, однако, что основные черты конкуренции

факторов группировки и антигруппировки событий рекомбинации будут общими для всех состояний, построенных из синглетных фермионных пар.

Представляет интерес картина пространственных корреляций в случае рекомбинации бозона и фермиона. Проекция спина в этом случае должна пониматься в некотором расширенном смысле, например, как внутреннее возбуждение частицы. Особенности бозон-фермионной системы требуют особой природы для параметра ψ : это должна быть грассманова переменная.

Авторы признательны П.Л. Чаповскому за обсуждение предмета статьи. Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты # 05-03-32801 и # 06-02-08134).

1. А. Л. Бучаченко, Э. З. Сагдеев, К. М. Салихов, *Магнитные и спиновые эффекты в химических реакциях*, Новосибирск: Наука, 1978.
2. K. M. Salikhov, Yu. N. Molin, R. Z. Sagdeev, and A. L. Buchachenko, *Spin polarization and magnetic effects in radical reactions*, Elsevier, Amsterdam, 1984.
3. M. Zulkowski, A. Zeilinger, M. A. Horne, and A. K. Ekert, *Phys. Rev. Lett.* **71**, 4287 (1993).
4. B. Brocklehurst, *Int. Rev. Phys. Chem.* **4**, 279 (1985).
5. Л. В. Ильичев, *ЖЭТФ* **117**, 248 (2000).
6. Л. В. Ильичев, *Теор. Мат. Физ.* **127**, 168 (2001).
7. Свойства квантовых состояний, приводящие к пространственным корреляциям событий, тесно связаны с понятием зацепленности в многочастичных системах. Последовательное строгое введение данного понятия требует учета нюансов, привносимых неразличимостью частиц, их статистикой и правилами суперотбора (например, четностью числа фермионов) ограничивающими вид допустимых локальных операций (см. M.-C. Van nuls, J. I. Cirac, and M. M. Wolf, *Phys. Rev. A* **76**, 022311 (2007) и имеющиеся там ссылки).
8. Выражения (7) и (8) сходны с так называемыми операторами сжатия, задающими в квантовой оптике преобразование фотонного состояния под действием параметрического генератора. Можно считать, что в нашем случае состояние $|\Xi\rangle$ возникло в результате некоторого гипотетического процесса с гамильтонианом, линейным по операторам рождения и уничтожения синглетных пар. Параметр ψ при этом пропорционален амплитуде волновой функции частиц, из которых рождаются пары, и константе взаимодействия, определяющей скорость взаимных превращений.
9. S. Oh and J. Kim, *Phys. Rev. A* **69**, 054305 (2004); C. Lunkes, C. Brukner, and V. Vedral, *Phys. Rev. Lett* **95**, 030503 (2005).