

Генерация перепутанных состояний в полидоменных кристаллах дигидрофосфата калия

Д. А. Калашников, В. П. Карасев⁺, С. П. Кулик*, А. А. Соловьев*, Г. О. Рытиков[∇]

Казанский физико-технический институт им. Е.К. Завойского РАН, 420029 Казань, Россия

⁺ Физический институт им. П.Н. Лебедева РАН, 119992 Москва, Россия

* Физический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова, 119992 Москва, Россия

[∇] Московский государственный университет печати, 127550 Москва, Россия

Поступила в редакцию 27 ноября 2007 г.

Экспериментально показано, что в процессе спонтанного параметрического рассеяния света в сегнетоэлектрических кристаллах, обладающих квазирегулярной доменной структурой (типа кристалла дигидрофосфата калия), возможно образование поляризационных перепутанных двухфотонных состояний в паре частотных мод. Определены значения мер перепутанности и поляризационные характеристики этих состояний.

PACS: 03.65.Wj, 03.67.Mn, 77.80.Dj

1. Введение. В теории квантовой информации большую роль играют перепутанные состояния (ПС) [1]. Если составная система находится в чистом состоянии и ее волновая функция не выражается через произведение волновых функций подсистем, то такое состояние называется перепутанным¹⁾. ПС лежат в основе нескольких протоколов квантовой информации [2, 3] и квантового распределения ключа [4, 5], а также рассматриваются как ресурс для выполнения квантовых вычислений [6]. Наиболее изученными являются ПС двух кубитов. В квантово-оптических экспериментах такие состояния получаются, в основном, за счет эффекта спонтанного параметрического рассеяния (СПР) света [7].

Данная работа посвящена исследованию поляризационных состояний двухфотонного света, получаемых в полидоменных кристаллах с определенной конфигурацией доменной структуры. Основной вопрос, на который в работе дается положительный ответ, формулируется так: может ли состояние на выходе образца оказаться перепутанным, даже если в каждом участке образца рождается факторизованное состояние?

При анализе состояния поляризации на выходе образца будем различать два типа возможных экспериментов.

1. На входе в полидоменный образец имеется только лазерное излучение в определенной частотной и угловой моде и с фиксированной поляризацией. В

объеме образца за счет восприимчивости второго порядка ($\chi^{(2)} \neq 0$) в процессе СПР рождаются бифотоны с известными частотными, угловыми и поляризационными свойствами, определяемыми симметрией отдельных доменов. Двухфотонное поле в заданной частотной и угловой моде на выходе образца представляет собой линейную суперпозицию поляризационных состояний бифотонов, родившихся в каждом домене-слое и преобразованных в последующих доменах.

2. Образец работает как линейный поляризационный преобразователь. При этом на входе уже имеется бифотонное поле с заданными спектральными, угловыми и поляризационными свойствами. При прохождении через полидоменный образец состояние поляризации бифотонов изменяется в зависимости от конфигурации доменной структуры и входных параметров бифотонов (спектральный состав, угловая структура, состояние поляризации).

В дальнейшем речь будет идти о так называемом коллинеарном режиме СПР, когда пары фотонов распространяются преимущественно в том же направлении, что и классическая волна накачки. Заметим, что частоты фотонов, составляющих пару, могут заметно отличаться, так что электромагнитное поле, принадлежащее одной пространственной моде, не является монохроматическим. В этом случае, вообще говоря, обычное двухмодовое поляризационное представление электромагнитного поля нуждается в уточнении, которое адекватно осуществляется в рамках концепции P -квазиспина [8, 9].

¹⁾ В данной работе мы ограничиваемся только случаем чистых перепутанных состояний.

В фоковском представлении произвольное поляризационное двухфотонное состояние при СПР представляется разложением по четырем базисным состояниям $|H_{s,i}\rangle$ и $|V_{s,i}\rangle$:

$$\Psi_4 = c_1|H_s\rangle|H_i\rangle + c_2|H_s\rangle|H_i\rangle + c_3|H_s\rangle|H_i\rangle + c_4|H_s\rangle|H_i\rangle = (c_1a_s^\dagger a_i^\dagger + c_2a_s^\dagger b_i^\dagger + c_3b_s^\dagger a_i^\dagger + c_4b_s^\dagger b_i^\dagger)|0,0\rangle. \quad (1a)$$

Символами $|H\rangle$ и $|V\rangle$ обозначены однофотонные состояния в горизонтальной и вертикальной поляризационных модах, индексы s и i относятся к сигнальной и холостой частотным модам, $a_{s,i}^\dagger, b_{s,i}^\dagger$ – операторы рождения фотонов в горизонтальной и вертикальной поляризационных модах, соответственно. В (1a) опущены слагаемые, отвечающие наличию двух фотонов в одной частотной моде: такие реализации неосуществимы при стационарном режиме СПР из-за выполнения условия сохранения энергии: $\omega_p = \omega_s + \omega_i$, $\omega_s \neq \omega_i$. В работах [8, 9] было показано, что волновая функция при P -квасиспиновой параметризации имеет вид

$$|\Psi\rangle_P = \left\{ d_1 a_s^\dagger a_i^\dagger + d_2 b_s^\dagger b_i^\dagger + d_3 \frac{b_s^\dagger a_i^\dagger + a_s^\dagger b_i^\dagger}{\sqrt{2}} + d_4 \frac{b_s^\dagger a_i^\dagger - a_s^\dagger b_i^\dagger}{\sqrt{2}} \right\} |0,0\rangle = d_1|P=1; m=+1\rangle + d_2|P=1; m=-1\rangle + d_3|P=1; m=0\rangle + d_4|P=0; m=0\rangle. \quad (1b)$$

Здесь базисные состояния $|P; m\rangle$ определяются соотношениями

$$\{\mathbf{P}^2|P; m\rangle = P(P+1)|P; m\rangle; \mathbf{P}_1|P; m\rangle = m|P; m\rangle\}, \quad (2)$$

а коллективные P -квасиспиновые операторы \mathbf{P}^2 и P_1 определены в [8, 9].

Заметим, что в представлении (1b) операторы $(1/\sqrt{2})(b_s^\dagger a_i^\dagger \pm a_s^\dagger b_i^\dagger)$ порождают два типа неполяризованных двухфотонных состояний, которые, по определению, являются максимально перепутанными.

2. Характеристики перепутывания поляризационных состояний. Для количественного анализа перепутывания будет использована мера, введенная Вутерсом – C [10, 11] (concurrence):

$$C = |d_3^2 - d_4^2 - 2d_1d_2| = 2|c_2c_3 - c_1c_4|, \quad 0 \leq C \leq 1, \quad (3)$$

которая функционально связана с линейной энтропией S . Из определения следует, что $C = 0$ для факторизованных состояний $|P=1; m=+1\rangle$, $|P=1; m=-1\rangle$, а для максимально перепутанных состояний $|P=1; m=0\rangle$, $|P=0; m=0\rangle$ величина C принимает наибольшее значение: $C = 1$.

В [8, 9] также были определены операционные характеристики поляризационных состояний световых полей, основанные на концепции P -квасиспина, которые могут рассматриваться как специфические меры их перепутанности. Среди них выделим: 1) величину

$$X_m = 1 - \frac{2\bar{P}}{N}, \quad \bar{P} = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \langle \mathbf{P}^2 \rangle}, \quad (4)$$

имеющую смысл доли содержания синглетных (P -скалярных) состояний $|P=0; m=0\rangle$ в (1b);

2) парциальные, то есть определенные для сигнальной и холостой частотных мод отдельно, $SU(2)_P$ – инвариантные степени деполяризации $1 - P$, где

$$P = 2 \sqrt{\sum_{j=1,2,3} \langle \hat{P}_j \rangle^2 / \langle \hat{n} \rangle}, \quad (5)$$

а $\langle n \rangle = 1$ для состояний (1). Средние $\langle \hat{P}_j \rangle$ выражаются через квадратичные комбинации коэффициентов в (1). Отсюда находим простую связь между мерами C и P :

$$C = \sqrt{1 - 0.5(P_s^2 + P_i^2)} = \sqrt{1 - P_s^2} = \sqrt{1 - P_i^2}, \quad (6)$$

где P_s^2, P_i^2 определены формулой (5) для сигнальной и холостой мод отдельно. Соотношение (6) проясняет физический смысл квадрата C как полусуммы парциальных степеней деполяризации в сигнальной и холостой модах или каждой отдельной парциальной степени деполяризации, поскольку для состояний (1) значения P_s и P_i всегда равны; однако в концептуальном плане первое равенство в соотношении (6) предпочтительней, так как включает обе моды эквивалентно.

3. Доменная структура дигидрофосфата калия. В эксперименте генерация пар фотонов осуществлялась в кристалле дигидрофосфата калия KN_2PO_4 (KDP). При температуре ниже $T_c = 123$ К этот кристалл испытывает сегнетоэлектрический фазовый переход второго рода. Условие обеспечения минимума свободной энергии вместе с требованием сохранения макроскопической симметрии образца при фазовом переходе приводит к тому, что кристалл разбивается на домены – участки с одинаковым направлением спонтанной поляризации. Каждый домен относится к орторомбическому классу симметрии $mm2$, в то время как весь образец (согласно принципу Кюри) принадлежит к тетрагональному классу $42m$ (рис.1). Границы доменов могут проходить по плоскостям (010) и (100), содержащим ось 4 и оси 2, поэтому равновероятно образование двух систем доменов или блоков [12]. Процесс формирования

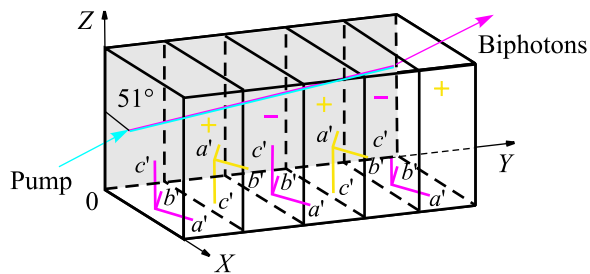


Рис.1. Доменная структура кристалла дигидрофосфата калия и геометрия эксперимента. X , Y , Z – тетрагональные оси, a' , b' , c' – орторомбические оси, “pump” – направление волнового вектора лазерной накачки, возбуждающей СПР, “biphotons” – направление волновых векторов сигнального и холостого фотонов, составляющих бифотон

ния блочной доменной структуры при фазовом переходе носит случайный характер, хотя характерные размеры и блоков, и доменов зависят от таких факторов, как размер образца и скорость его охлаждения в окрестности T_c . Толщины доменов, измеренные разными методами, для образцов с характерными размерами около 10 мм оказываются порядка 10 мкм [13, 14]. В [15] измерены функции распределения толщин доменов, которые обнаруживают резкий максимум в окрестности $d \approx 9$ мкм. В ряде работ исследовались вопросы, связанные с распространением поляризованного света через полидоменные кристаллы группы KDP [16, 17], где рассматривается изменение поляризации нормальных волн на доменных границах. Другая группа работ связана с исследованием процессов спонтанного комбинационного [18] и спонтанного параметрического [19] рассеяния света в полидоменных образцах. Основной вывод обеих групп работ состоит в том, что доменная структура служит эффективным поляризационным преобразователем. Фактически, каждый домен представляет собой фазовую пластинку, поэтому набор доменов можно рассматривать как фазовую дифракционную решетку, эффективно перераспределяющую энергию между поляризационными и угловыми модами. В общем случае при распространении оптического излучения через подобные структуры необходимо учитывать и процессы перераспределения энергии между частотными модами – за счет вклада восприимчивостей высших порядков.

4. Экспериментальная установка и методика измерений. Для восстановления вектора состояния используется корневой метод статистического восстановления квантовых состояний, предложенный в [20] и апробированный на модельных состояниях пары поляризационных перепутанных кубитов [21].

При этом неизвестное состояние, выходящее из образца, подвергается набору унитарных поляризационных преобразований и проекционных измерений.

Схема экспериментальной установки показана на рис.2. Заданные поляризационные преобразования

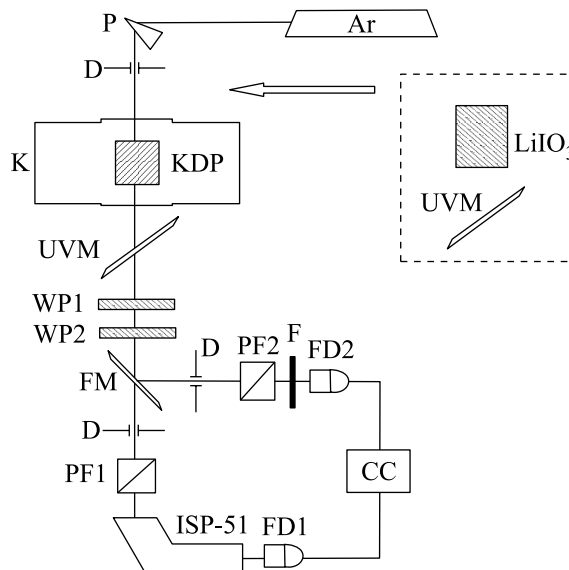


Рис.2. Экспериментальная установка: Ar – аргоновый лазер 351 нм.; P – поворотная призма; D – диафрагмы; K – криостат; KDP – образец; LiIO_3 – кристалл йодата лития; UVM – ультрафиолетовое зеркало; WP1, WP2 – пластинки кристаллического кварца толщиной 3716 мкм и 437 мкм; FM – откидное полупрозрачное зеркало; PF1, PF2 – поляризационные призмы; ISP-51 – спектрограф; F – широкополосный фильтр серии КС; FD – лавинные фотодиоды; CC – схема совпадений

выполнялись при помощи пары пластинок, вырезанных из кристаллического кварца ($WP1$ и $WP2$), толщиной 3716 мкм и 437 мкм, соответственно. Затем преобразованное состояние проецировалось на фиксированное состояние с вертикальной поляризацией при помощи поляризационных призм, установленных в каждом канале схемы Брауна-Твисса. Детекторы работают в счетном режиме так, что средняя интенсивность пропорциональна числу импульсов. Измерительная схема фиксирует как средние интенсивности излучения с вертикальной поляризацией $R_1 \propto \langle I_1 \rangle$, $R_2 \propto \langle I_2 \rangle$ в каждом канале за фиксированное время $T = 100$ мс, так и коррелятор интенсивностей, пропорциональный числу совпадений фотоотсчетов $R_c \propto \langle I_1 I_2 \rangle$. Преобразования над двухфотонным состоянием, осуществляемые поляризационными элементами, могут быть представлены в виде матрицы

$$G = \begin{pmatrix} t_s & r_s \\ -r_s^* & t_s^* \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} t_i & r_i \\ -r_i^* & t_i^* \end{pmatrix}, \quad (7)$$

	c_1	c_2	c_3	c_4	X_m	P_s	P_s	$C_{(3)}$	$C_{(6)}$
1-ая группа	0.3776 +0.1192i	0.4074 -0.0497i	-0.3179 -0.0596i	0.7551	0.1821	0.5135	0.5135	0.8581	0.8581
2-ая группа	-0.1095 -0.0299i	0.0797 -0.1295i	0.0598 -0.5975i	0.7768	0.1251	0.9976	0.9976	0.0690	0.0690

где коэффициенты t_j , r_j определяются двупреломлением и углом поворота преобразователя, а индекс $j = s, i$ относится к фотонам с длинами волн λ_s и λ_i , соответственно [22]. Таким образом, поляризационные преобразования над данным состоянием $|\Psi_{is}\rangle$ осуществляются поворотом пластин на фиксированные углы α, β :

$$|\Psi_{is}\rangle_{kl} = \hat{G}(\lambda_i, \alpha_k) \hat{G}(\lambda_s, \beta_l) |\Psi_{is}^{\text{out}}\rangle. \quad (8)$$

Число совпадений фотоотсчетов R_{kl} , регистрируемое за время T , задается проектором:

$$R_{kl} \propto |\langle V_1 V_2 | \Psi \rangle_{kl}|^2. \quad (9)$$

Для восстановления исходного состояния производится измерение R_{kl} при различных положениях пластинок. При этом число состояний $|\Psi_{is}\rangle_{kl}$, задаваемых ориентациями пластинок $WP1$ и $WP2$, должно быть не менее $2D - 2$, где $D = 4$ – размерность гильбертова пространства для системы из двух поляризационных кубитов, представляющих собой бифотон. Для повышения точности статистического восстановления состояний предпочтительнее использовать избыточное число измерений [21]. Для пластинки $WP1$ значения углов поворота составляли $\alpha = 0, 15^\circ, 30^\circ$ и 45° , а пластинка $WP2$ совершала полный поворот $0^\circ \leq \beta \leq 360^\circ$ через каждые 10° . Таким образом, серия измерений включала 144 различных комбинаций ориентаций обеих пластинок.

Все измерения производились при стабильной температуре образца в диапазоне 100–115 К. Спектрограф ИСП-51 с разрешением 0.6 нм использовался для выделения сигнальной длины волны λ_s . Вклад в совпадения давали лишь фотоны сопряженной частотной моды λ_i . Однако вклад в единичные отсчеты детектора FD2 второго канала давали оба фотона пары $(N_{\lambda_i} + N_{\lambda_s})$.

В качестве накачки использовался аргоновый лазер, работающий в непрерывном режиме с длиной волны излучения 351 нм и мощностью 60 мВт. Горизонтально поляризованное излучение накачки попадало на образец KDP, в котором наблюдалось СПР как в параэлектрической, так и в сегнетоэлектрической фазах. Образец длиной 10 мм был вырезан под синхронизм I-го типа. Использовался коллинеарный

невырожденный режим СПР, для которого волновой вектор накачки примерно составлял угол 51° с оптической осью. Для проведения измерений в сегнетоэлектрической фазе кристалл помещался в криостат K . После криостата излучение накачки отсекалось зеркалом UVM . Для проведения второй группы экспериментов перед криостатом устанавливался кристалл йодата лития $LiIO_3$ длиной 10 мм. В этом случае излучение накачки отсекалось зеркалом UVM сразу после кристалла $LiIO_3$ так, чтобы накачка не попадала в образец KDP. Тогда на него поступало только бифотонное поле, рожденное в кристалле $LiIO_3$, и образец работал как поляризационный преобразователь.

5. Результаты восстановления состояний и оценка мер перепутывания. 1. Сначала проводилось статистическое восстановление состояний для случая, когда бифотоны рождались в полидоменном образце. Были выбраны длины волн: $\lambda_s = 676$ нм, $\lambda_i = 730$ нм. В каждом домене-слое k генерируются факторизованные состояния:

$$|\Psi^{(k)}\rangle = |O_{676}^{(k)}, O_{730}^{(k)}\rangle, \quad (10)$$

которые при распространении через образец испытывают поляризационные $SU(2)$ -преобразования. На выходе получается суперпозиция состояний, рожденных в каждом домене.

2. Следующим шагом аналогичные измерения проводились в случае, когда состояние $|V_1 V_2\rangle$, полученное при СПР в кристалле $LiIO_3$, пропусклось через тот же образец. Состояние на входе в полидоменный образец факторизованное:

$$|\Psi_{in}\rangle = |V_{676}, V_{730}\rangle, \quad (11)$$

3. Из полученных данных вычислялись меры перепутанности для состояний на выходе кристалла по формулам (3)–(6).

В таблице приводятся результаты статистического восстановления поляризационных состояния бифотонного поля на выходе образцов для обеих групп экспериментов (первые 4 столбца), а также значения мер перепутывания из (3)–(6).

6. Обсуждение результатов эксперимента. Результаты, приведенные выше, имеют простое ка-

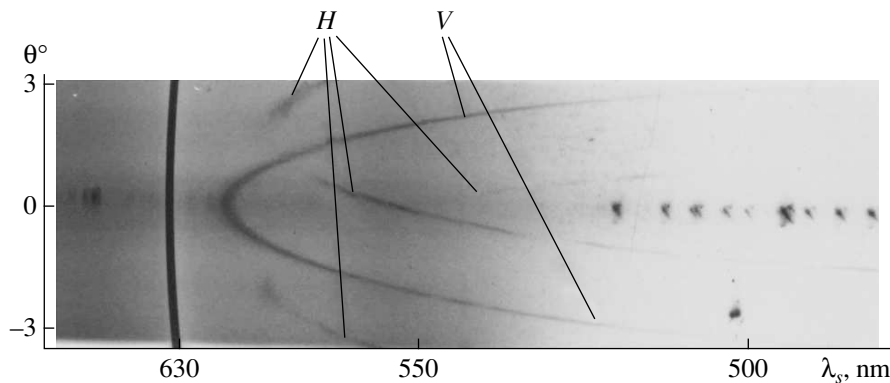


Рис.3. Фотография частотно-углового спектра полидоменного образца KDP. Стрелками показаны преимущественные поляризации соответствующих ветвей спектра

чественное объяснение. Действительно, если бифотонное поляризационное состояние пропускается через полидоменный образец (2-ая группа) и изначально является факторизованным, то оно останется факторизованным на выходе, так как степень перепутывания не меняется локальными преобразованиями, которые задаются произведением матриц, описывающих $SU(2)$ поляризационные преобразования в каждом домене на частотах ω_s, ω_i .

В первой группе экспериментов бифотон в поляризационном состоянии $|O_1 O_2\rangle^{(m)}$ может родиться в каждом m -м домене-слое – случайно по длине неоднородного образца $L = \sum_{i=1}^N d_i$ (d – толщина домена, N – число доменов). Символом $|O_1 O_2\rangle^{(m)} \equiv |O_1\rangle^{(m)} \otimes |O_2\rangle^{(m)}$ обозначено состояние двух фотонов, поляризованных вдоль направления \vec{O} в m -м домене (нижние индексы относятся к длинам волн каждого из фотонов, составляющих пару). Затем родившийся бифотон распространяется через оставшуюся часть образца, и его поляризационное состояние меняется за счет $SU(2)$ -вращений, которые задаются матрицами G_m , где m – номер домена ($1 \leq m \leq N$). При этом состояние на выходе представляется суперпозицией состояний родившихся в каждом домене:

$$G_N G_{N-1} \dots G_2 |O_s O_i\rangle^{(1)} + G_N G_{N-1} \dots G_3 |O_s O_i\rangle^{(2)} + \dots + G_N |O_s O_i\rangle^{(N-1)} + \dots + |O_s O_i\rangle^{(N)}. \quad (12)$$

Например, первое слагаемое в (12) описывает вклад бифотона, родившегося в первом домене и преобразованного всеми последующими доменами по мере распространения через образец. Состояние (12) может быть преобразовано к виду (1а), то есть суперпозиции четырех базисных состояний $|H_{s,i}\rangle$ и $|V_{s,i}\rangle$ в

лабораторном базисе: в общем виде оно является перепутанным. Запись вектора состояния в символах $|O_{s,i}\rangle$ означает, что поляризационный базис в m -м домене определяется расположением его кристаллографических осей и не совпадает, вообще говоря, с лабораторным поляризационным базисом $|H_{s,i}\rangle, |V_{s,i}\rangle$.

Отметим полное совпадение значений C , рассчитанных по формулам (3) и (6) (два последних столбца в таблице). Низкое значение X_m в обеих группах экспериментов указывают на удаленность выходных состояний от синглетных состояний $|P = 0; m = 0\rangle$.

Представление состояния бифотонов на выходе образца в виде (12) предполагает наличие двух физических процессов. Это – рождение факторизованных состояний бифотонов в каждом домене и преобразование поляризационного состояния бифотонов по мере распространения через слоистую структуру. Очевидным следствием таких процессов является присутствие обеих ортогональных поляризационных компонент бифотонного поля на выходе кристалла. Для независимой проверки этого утверждения были получены частотно-угловые спектры СПР в полидоменном кристалле KDP (рис.3), для чего на выходе спектрографа устанавливалась кассета с фотопленкой. Анализ поляризации регистрируемого (сигнального) излучения проводился путем поворота поляризационной призмы $PF1$. Спектр состоит из трех характерных кривых, одна из которых расположена симметрично относительно оси нулевых углов, а две другие сдвинуты примерно на 2° в область положительных и отрицательных углов рассеяния. Центральная кривая соответствует режиму СПР, при котором сигнальные и холостые фотоны имеют вертикальную поляризацию. Излучение, соответствующее сдвинутым по углу ветвям, имеет горизонтальную

поляризацию. Важно, что сдвинутые ветви наблюдаются только в полидоменных образцах, тогда как центральная ветвь присутствует в спектрах и монодоменных и полидоменных образцов. Имеется, по крайней мере, два механизма, приводящие к возникновению участков спектра с ортогональной поляризацией: анизотропная линейная дифракция сигнального излучения и квазисинхронная генерация СПР. В данной работе мы ограничимся лишь констатацией факта возникновения в спектре СПР частотно-угловых компонент с обеими поляризациями. Этот факт подтверждает результат статистического восстановления состояний: если бифотонное состояние является поляризационно-перепутанным, то состояние сигнальных (или холостых) фотонов представляет собой смесь вкладов ортогональных поляризационных компонент.

7. Заключение. В работе экспериментально показано, что в процессе СПР света в сегнетоэлектрических кристаллах, обладающих квазирегулярной доменной структурой (типа кристалла дигидрофосфата калия), возможно образование перепутанных двухфотонных состояний. Перепутывание между поляризационными и частотными степенями свободы осуществляется в результате специфических поляризационных преобразований, при которых

– в объеме образца в двух частотных модах рождаются факторизованные состояния пар фотонов с фиксированными поляризациями;

– при последующем распространении через образец каждое двухфотонное поляризационное состояние претерпевает $SU(2)$ -вращения в каждой частотной моде. Таким образом, на выходе образца возникает поляризационное двухфотонное состояние, имеющее смысл информационного кукварта – суперпозиции четырех базисных состояний. Измерены количественные характеристики перепутывания. Сравнение экспериментальных данных с предварительными результатами моделирования различных конфигураций доменной структуры кристалла [23] свидетельствует о блочном характере расположения доменов. Только такая конфигурация приводит к высокому значению степени перепутывания двухфотонного состояния, наблюдаемой в эксперименте.

В этой связи следующей интересной задачей является поиск специфических особенностей в конфигурации доменной структуры (функция распределения размеров доменных блоков, функция распределения толщин доменов в каждом блоке), которые приводят к перепутыванию.

Авторы благодарят Л.А.Кривицкого за помощь в получении спектров СПР и обсуждение результатов.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты # 07-02-91581-АСП_а и # 06-02-16769-а), а также Программы поддержки ведущих научных школ (грант # НШ-4586.2006.2).

1. E. Shrodinger, *Naturwissenschaften* **23**, 807, 823, 844 (1935); Э. Шредингер, *Успехи Химии* **5**, 390 (1936).
2. C. Bennet, G. Brassard, C. Crepeau et al., *Phys. Rev. Lett.* **70**, 1895 (1993).
3. C. H. Bennett and S. J. Wiesner, *Phys. Rev. Lett.* **69**, 2881 (1992).
4. A. K. Ekert, *Phys. Rev. Lett.* **67**, 661 (1991).
5. K. Boström and T. Felbinger, *Phys. Rev. Lett.* **89**, 187902 (2002).
6. M. A. Nielsen and I. Chuang, *Quantum Computation and Quantum Information*, Cambridge University Press, 2000.
7. Д. Н. Клышко, *Фотоны и нелинейная оптика*, М.: Наука, 1980, с. 256.
8. V. P. Karassiov, *J. Phys. A* **26**, 4345 (1993); В. П. Карасев, *Письма в ЖЭТФ* **84**, 759 (2006).
9. В. П. Карасев, С. П. Кулик, *ЖЭТФ* **131**, 37 (2007).
10. S. Hill and W. Wootters, *Phys. Rev. Lett.* **78**, 5022 (1997).
11. W. Wootters, *Phys. Rev. Lett.* **80**, 2245 (1998).
12. И. С. Желудев, *Основы сегнетоэлектричества*, М.: Атомиздат, 1973.
13. R. M. Hill and S. K. Ichiki, *Phys. Rev.* **135**, 1640 (1964).
14. T. Mitsui and J. Furuichi, *Phys. Rev.* **90**, 193 (1953).
15. Т. С. Величкина, О. Н. Голубева, О. А. Шустин, И. А. Яковлев, *Письма в ЖЭТФ* **9**, 261 (1969).
16. R. M. Hill, G. F. Hermann, and S. K. Ichiki, *J. Appl. Phys.* **36**, 3672 (1965).
17. A. V. Belinsky, G. Kh. Kitaeva, S. P. Kulik, and A. N. Penin, *Phys. Rev. B* **51**, 3362 (1995).
18. Y. Takagi, Shigenary, *J. Opt. Soc. of Am.* **63**, 945 (1973); Y. Takagi, Shigenary, *Solid State Com.* **11**, 481 (1972).
19. A. V. Belinsky, G. Kh. Kitaeva, S. P. Kulik, and A. N. Penin, *Ferroelectrics* **170**, 171 (1995); S. P. Kulik, G. Kh. Kitaeva, and A. N. Penin, **172**, 469 (1995).
20. Yu. I. Bogdanov, *quant-ph/0303014* (2003).
21. Ю. И. Богданов, Р. Ф. Галеев, С. П. Кулик и др., *Письма в ЖЭТФ* **82**, 164 (2005); Yu. I. Bogdanov, R. F. Galeev, S. P. Kulik et al., *Phys. Rev. A* **73**, 063810 (2006).
22. Д. Н. Клышко, *ЖЭТФ* **111**, 1955 (1997).
23. А. Прудковский, *Письма в ЖЭТФ* **86**, 741 (2007).