

# Переустановка фазы сложных автоколебаний импульсным воздействием

В. В. Клиньшов<sup>1)</sup>, В. И. Некоркин

Институт прикладной физики РАН, 603950 Нижний Новгород, Россия

Поступила в редакцию 26 ноября 2007 г.

Изучен эффект переустановки фазы под действием внешнего импульса в сложной автоколебательной системе. После воздействия внешним импульсом фаза автоколебаний в системе приобретает новое значение, которое практически не зависит от исходного и определяется только параметрами импульса (амплитудой и длительностью). Переустановка наблюдается для импульсов различной длительности, в том числе достаточно коротких по сравнению с характерным масштабом автоколебаний системы. Эффект имеет место без принципиальных отличий как в случае регулярных, так и хаотических колебаний системы.

PACS: 05.45.—a

**Введение.** Исследование динамики автоколебательных систем, находящихся под внешним воздействием, является важной проблемой нелинейной физики [1, 2]. Классическим примером может служить задача о вынужденной синхронизации автогенератора внешним гармоническим сигналом, навязывающим системе свой ритм [3, 4]. Другой пример – динамика автоколебательных систем, находящихся под действием периодических импульсных сигналов [5, 6]. Большой интерес вызывают также задачи управления и контроля колебаний, в том числе хаотических, с помощью внешнего воздействия [7]. В частности, это могут быть задачи управления фазой автоколебаний и формирования фазовых кластеров заданной конфигурации в ансамблях автогенераторов [8–10]. Подобные задачи имеют большое значение, например, в нейродинамических системах [11]. Сложные информационные процессы в нейронных сетях часто связаны с возникновением кластеров колебательной активности, причем важна как их внутренняя структура, так и фазовые соотношения между колебаниями различных кластеров [12–17].

Достаточно хорошо изучено кластерообразование в ансамблях локально связанных элементов – в этом случае формирование кластеров происходит за счет механизма взаимной синхронизации (см., например, [9]). Механизм образования кластеров в ансамблях с дальними связями изучен гораздо хуже. Сравнительно недавно в работе [12] на примере системы, моделирующей динамику ансамбля нейронов нижних олив, была показана возможность образования кластеров с помощью стимуляции системы внешним импульс-

ным воздействием. В основе процесса лежит так называемый эффект *переустановки фазы* периодических (близких к синусоидальным) колебаний. Он заключается в следующем: при воздействии коротким импульсом на автоколебательную систему фаза колебаний принимает некоторое новое значение, практически не зависящее от исходной фазы. Это новое значение фазы определяется только параметрами внешнего импульса.

В настоящей работе мы изучаем эффект фазовой переустановки в случае более сложного вида автоколебаний. В качестве автоколебательной системы мы рассматриваем известную модель Хиндмарш–Розе [18], описывающую так называемые бёрстовые колебания нейронов (рис.1). *Бёрстами* называют по-

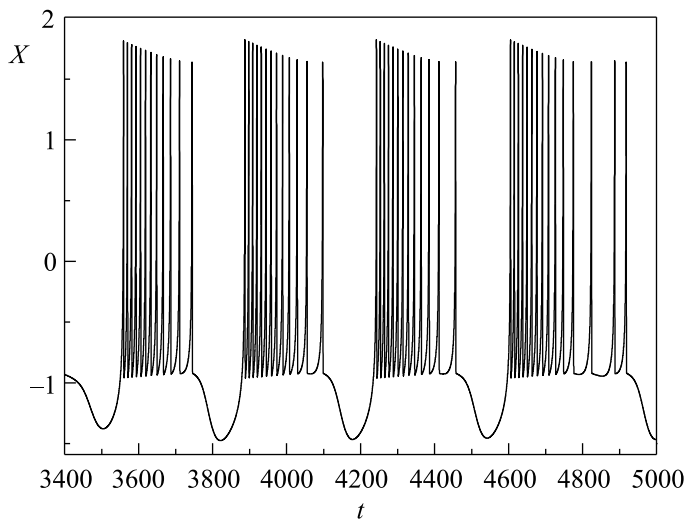


Рис.1. Бёрстовые колебания системы Хиндмарш–Розе

<sup>1)</sup>e-mail: vklin@neuron.appl.sci-nnov.ru

следовательности из трех и более потенциалов действия, так называемых *спайков* [19]. В работе рассматриваются случаи как регулярных, так и хаотических колебаний.

**1. Модель.** Рассмотрим систему Хиндмарш-Розе, имеющую вид

$$\begin{aligned} dx/dt &= ax^3 - bx^2 - y + z + I(t), \\ dy/dt &= c - dx^2 - y, \\ dz/dt &= r(s(x - x_0) - z). \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь переменная  $x$  описывает мембранный потенциал нейрона, переменные  $y$  и  $z$  – соответственно быстрый и медленный ионные токи,  $I(t)$  – внешний стимул,  $a, b, c, d, s$  и  $x_0$  – положительные параметры,  $0 < r \ll 1$  – малый параметр.

Изучим сначала автономную динамику системы ( $I(t) \equiv 0$ ). Система (1) содержит малый параметр  $r$  и, следовательно [20], обладает релаксационной динамикой. Фазовое пространство  $R^3$  системы состоит из областей быстрых и медленных движений, обладающих различными временными масштабами. Медленные движения имеют место вблизи так называемых многообразий медленных движений, быстрые движения происходят вне данных многообразий. Быстрые движения определяются в основном системой

$$\begin{aligned} dx/dt &= ax^3 - bx^2 - y + z, \\ dy/dt &= c - dx^2 - y, \\ z &= z_0 = \text{const}, \end{aligned} \quad (2)$$

где  $z_0$  играет роль параметра. Устойчивые многообразия медленных движений определяются аттракторами системы (2). Существует [21, 22] два устойчивых многообразия медленных движений. На рис.2а схематически представлены основные элементы разбиения трехмерного фазового пространства системы. Через  $W_0$  обозначено многообразие, соответствующее устойчивому состоянию равновесия системы (2). Оно определяется следующим образом:

$$y = c - dx^2, \quad z = c + (b - d)x^2 - ax^3$$

и существует для  $z > z_1 = c$ . Второе многообразие, обозначенное как  $W_1$ , образовано устойчивым предельным циклом системы (2) и существует при  $z < z_2$ , где  $z_2 > z_1$  – значение параметра  $z_0$ , соответствующее бифуркации петли сепаратрисс седла в системе (2). Движение в окрестности многообразия  $W_0$  отвечает невозбужденному состоянию системы, движение вдоль  $W_1$  – возбужденному.

Режим генерации бёрстов соответствует движению системы поочередно в окрестности многообра-

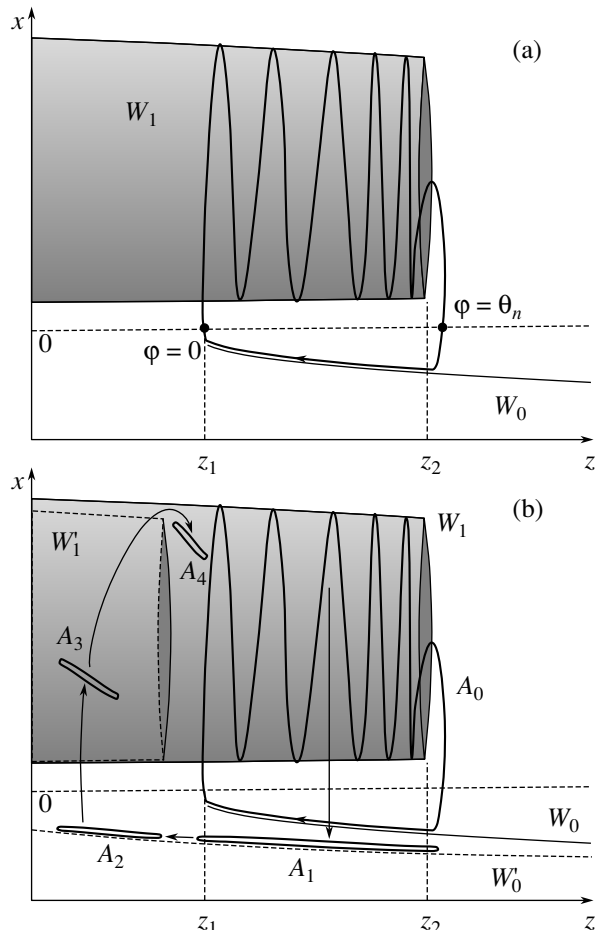


Рис.2. Схематическое представление фазового портрета системы Хиндмарш-Розе. (а) Многообразия медленных движений и аттрактор системы. Определение понятия “фаза” системы: фаза равна нулю в начале генерации бёрста и нарастает равномерно до начала следующего. (б) Смещенные многообразия (пунктиром) и сжатие фазового объема системы под действием внешнего импульса (объяснение в тексте)

зий  $W_0$  и  $W_1$ . Изображающая точка сначала движется вдоль многообразия  $W_0$ , затем по быстрым движениям переходит в окрестность многообразия  $W_1$ , движется вдоль него, совершая некоторое число оборотов (равное числу импульсов в бёрсте), и снова переходит в окрестность  $W_0$ . При этом в фазовом пространстве системы (1) в зависимости от параметров существует либо устойчивый предельный цикл сложной формы, либо хаотический аттрактор.

**2. Фаза сложных автоколебаний.** Вообще говоря, строгое определение фазы существует лишь для гармонических колебаний. Тем не менее, при исследовании негармонических периодических или хаотических колебаний часто также вводят величину, на-

деленную некоторыми свойствами классической фазы, сохраняя за ней название “фаза” [7]. В данной работе мы определяем понятие фазы колебаний системы (1) следующим образом. Обозначим как  $\{t_n\}$  последовательность моментов пересечения траекториями системы плоскости  $x = 0$  в направлении возрастания переменной  $x$ . Нетрудно видеть, что эти моменты – моменты перехода изображающей точки от многообразия  $W_0$  к многообразию  $W_1$ , то есть моменты начала очередного бёрста (см. рис.2b). Тогда значение фазы колебаний системы в момент времени  $t$  определяется следующим выражением:

$$\varphi(t) = 2\pi \frac{t - t_n}{t_{n+1} - t_n} \quad \text{для } t \in [t_n; t_{n+1}]. \quad (3)$$

Обозначим через  $\{t'_n\}$  моменты пересечения траекториями системы плоскости  $x = 0$  в направлении убывания переменной  $x$ , то есть моменты прекращения бёрстов. Тогда  $\tau_n = t'_n - t_n$  является длительностью  $n$ -го бёрста. Введем обозначение  $\theta_n = 2\pi\tau_n/T_n$ ; тогда, если  $0 \leq \varphi \leq \theta_n$ , система находится в возбужденном состоянии, а для других значений фазы – в невозбужденном. Таким образом, введенная фаза описывает динамику бёрстов, но не отдельных импульсов. Во время генерации одного бёрста и последующего периода рефрактерности фаза равномерно возрастает от нуля до  $2\pi$ . При регулярных колебаниях “период”  $T_n = t_{n+1} - t_n$  является постоянной величиной, и фаза возрастает равномерно все время. В случае хаотических колебаний величины  $T_n$  различны, и зависимость фазы от времени является кусочно-линейной. В этом случае понятие фазы имеет смысл только в том случае, если аттрактор является так называемым фазово-когерентным, то есть величины  $T_n$  достаточно близки [7].

**3. Переустановка фазы внешним прямоугольным импульсом.** Рассмотрим действие на систему (1) прямоугольного импульса амплитуды  $I_p$  и длительности  $\tau_p$ :

$$I(t) = \begin{cases} 0, & t < t_p, \\ I_p, & t_p \leq t < t_p + \tau_p, \\ 0, & t \geq t_p + \tau_p. \end{cases} \quad (4)$$

До момента действия импульса система генерирует бёрсты, как это было описано выше. Пусть в момент прихода импульса  $t = t_p$  изображающая точка системы находится на ее аттракторе. Во время действия импульса ( $t_p \leq t < t_p + \tau_p$ ) правая часть первого уравнения системы (1) изменяется на величину  $I_p$ . Это приводит к тому, что многообразия медленных движений в фазовом пространстве системы “сдвигаются” вдоль оси  $z$  на величину  $-I_p$ , как это изображено

на рис.2b. Многообразие  $W_0$  принимает вид  $W'_0$ , а многообразие  $W_1$  – вид  $W'_1$ .

Рассмотрим случай, когда полярность импульса положительна, а его амплитуда достаточно велика ( $I_p > z_2 - z_1$ ). Обозначим множество точек, принадлежащих аттрактору системы, как  $A_0$  и рассмотрим отображение сдвига системы за время действия импульса  $S_p: (x(t_p), y(t_p), z(t_p)) \mapsto (x(t_p + \tau_p), y(t_p + \tau_p), z(t_p + \tau_p))$  для точек аттрактора  $(x(t_p), y(t_p), z(t_p)) \in A_0$ . В течение короткого времени после прихода импульса все точки множества  $A_0$  переходят в окрестность  $W'_0$  вдоль быстрых траекторий, и множество  $A_0$  отображается в некоторое множество  $A_1$  (см. рис.2b). Далее в течение времени  $t_p$  изображающие точки двигаются вдоль многообразия  $W'_0$ , и множество  $A_1$  преобразуется в некоторое множество  $A_2$ . Нетрудно показать, что отображение  $A_1 \mapsto A_2$  является сжимающим, поскольку во время действия импульса фазовый объем системы (1) претерпевает сильное сжатие. После прекращения действия импульса многообразие медленных движений «возвращаются» на свои прежние места, и изображающие точки по быстрым движениям переходят в окрестность  $W_1$ . При этом множество  $A_2$  отображается в множество  $A_3$ , расположенное в окрестности  $W_1$ . Через некоторое время, когда все изображающие точки возвращаются на аттрактор, они принадлежат множеству  $A_4 \in A_0$ , размеры которого значительно меньше размеров исходного множества  $A_0$ .

Итак, отображение  $S_p$  переводит множество  $A_0$  в множество  $A_4 \in A_0$ . Для точек множества  $A_0$  значения фазы распределены во всем интервале  $[0; 2\pi]$ , а для точек множества  $A_4$  значения фазы заключены в некотором достаточно малом интервале  $\varphi_r \pm \delta\varphi_r/2$ , где величины  $\varphi_r$  и  $\delta\varphi_r$  зависят от параметров импульса. Таким образом, под действием внешнего импульса фаза системы приобретает некоторое значение в интервале  $\varphi_r \pm \delta\varphi_r/2$ , которое незначительно зависит от исходного значения фазы ( $\delta\varphi_r \ll 2\pi$ ). Это и означает «переустановку» фазы автоколебаний системы. Аналогично происходит переустановка фазы под действием импульса отрицательной полярности.

Описанные свойства иллюстрирует рис. 3а, на котором изображена динамика ансамбля пяти несвязанных систем (1) с различными начальными условиями, испытывающих воздействие одного и того же входного сигнала (4)<sup>2</sup>. До прихода импульса фазы

<sup>2</sup>Значения параметров для всех систем были выбраны равными:  $a = 1$ ,  $b = 3$ ,  $c = 1$ ,  $d = 5$ ,  $r = 10^{-3}$ ,  $s = 4$ ,  $x_0 = -1$ . При этих значениях параметров колебания систем регулярны.

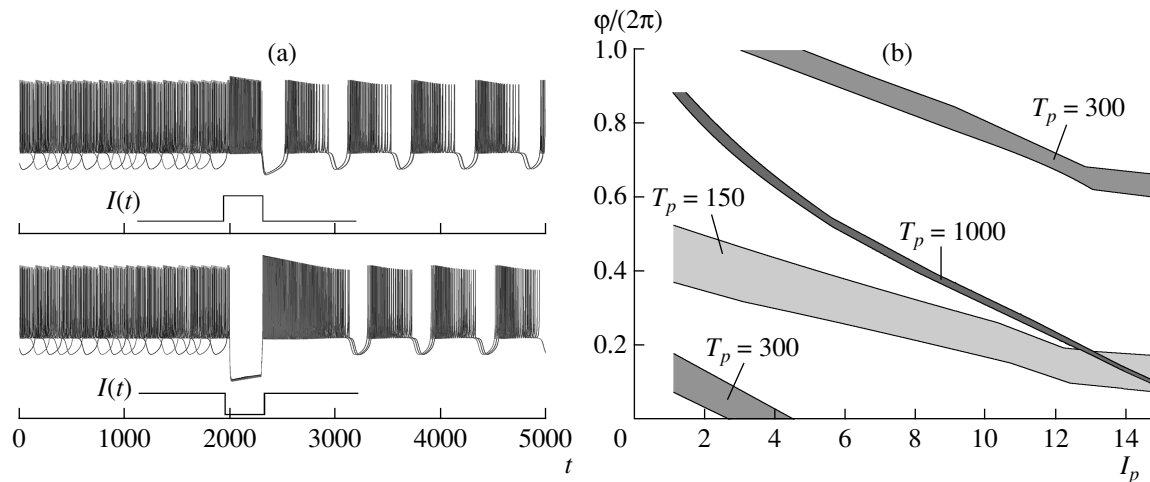


Рис.3. (а) Переустановка фазы в ансамбле автоколебательных систем (1). До импульсного воздействия систем распределены в интервале от 0 до  $2\pi$ , а после воздействия они принимают близкие значения. (б) Зависимость новой фазы и точности ее установки от амплитуды и длительности импульса. Линии различных оттенков серого соответствуют различным длительностям импульса, ширина этих линий соответствует точности установки фазы. При действии на систему импульсом ее новая фаза приобретет значение из того интервала на данном графике, который соответствует параметрам поданного импульса

систем имеют различные, случайно выбранные значения. После действия импульса в системах устанавливаются новые, близкие значения фаз. Таким образом, имеет место своеобразная фазовая синхронизация автоколебательных систем с помощью внешнего импульсного воздействия.

В зависимости от параметров импульсного воздействия переустановка фазы автоколебательной системы происходит по-разному. Различны и значения новой фазы  $\varphi_r$ , и точность ее установления  $\delta\varphi_r$ . Для количественной характеристики эффекта фазовой переустановки была проанализирована зависимость величин  $\varphi_r$  и  $\delta\varphi_r$  от амплитуды и длительности импульса<sup>3)</sup>. Эта зависимость представлена на рис.3б. Линии различных оттенков серого соответствуют различным длительностям импульса, ширина этих линий соответствует точности установки фазы  $\delta\varphi_r$ . Представленные результаты показывают, что, варьируя амплитуду и/или длительность импульса, можно установить в автоколебательной системе практически любое значение фазы колебаний. Более длинные импульсы устанавливают фазу более точно (это связано с более сильным сжатием фазового объема отображением  $A_1 \mapsto A_2$ ). Например, для  $\tau_p = 1000$  точность установки фазы  $\delta\varphi_r \sim 0.01\pi$ . Однако даже сравнительно короткие импульсы приво-

дят к установке фазы с удовлетворительной точностью: так, для  $\tau_p = 150$  разброс фаз  $\delta\varphi_r \sim 0.1\pi$ . Характерный временной масштаб автоколебаний системы для данных параметров составляет  $T \approx 500$ . Таким образом, переустановка фазы достигается при длительности импульса, в несколько раз меньшей этого характерного масштаба.

**Заключение.** Изучен эффект переустановки фазы внешним импульсным воздействием в системе Хиндмарш–Розе, демонстрирующей либо регулярные, либо хаотические колебания. Эффект заключается в следующем: при стимуляции внешним импульсом в системе устанавливается новое значение фазы, слабо зависящее от исходного. Переустановка имеет место как для положительных, так и для отрицательных импульсов. Исследованы зависимости значения новой фазы и точности ее установки от параметров импульса.

Фазовая переустановка является эффективным механизмом управления колебаниями автогенераторов. Она может быть использована для управления фазой автоколебаний, синхронизации ансамбля несвязанных автоколебательных систем, а также для формирования в нем фазовых кластеров заданной конфигурации. Особого внимания заслуживает тот факт, что эффект фазовой переустановки наблюдается без принципиальных различий как для регулярных, так и для слабохаотических автоколебаний.

Исследование выполнено при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (# 06-02-16137).

<sup>3)</sup>Значения параметров системы были выбраны следующими:  $a = 1$ ,  $b = 3$ ,  $c = 1$ ,  $d = 5$ ,  $r = 10^{-3}$ ,  $s = 4$ ,  $x_0 = -0.809$ . При этих значениях параметров колебания в системе являются хаотическими. Новая фаза  $\varphi_r$  отсчитывалась от момента начала импульса.

1. А. А. Андронов, А. А. Витт, С. Э. Хайкин, *Теория колебаний*, М.: Физматгиз, 1959.
2. A. Pikovsky, M. Rosenblum, and J. Kurths, *Synchronization: a universal concept in nonlinear sciences*, Cambridge, Cambridge University Press, 2002.
3. А. А. Андронов, А. А. Витт, В книге А. А. Андронов, *Собрание трудов* (под ред. М. А. Леонтовича) М.: АН СССР, 1956, стр. 51.
4. Д. В. Тураев, А. Л. Шильников, Л. П. Шильников, В книге *Нелинейные волны'2004*, отв. ред. А. В. Гапонов-Грехов, В. И. Некоркин, Нижний Новгород, ИПФ РАН, 2005, стр. 426.
5. А. П. Кузнецов, Л. В. Тюрюкина, Изв. вузов, Прикладная нелинейная динамика **9**, 69 (2001).
6. С. П. Кузнецов, *Динамический хаос* (курс лекций), М.: Изд-во Физико-математической литературы, 2006.
7. V. S. Anishenko, V. V. Astakhov, A. B. Neyman et al., *Nonlinear dynamics of chaotic and stochastic systems*, Berlin, Springer, 2003.
8. T. Zhou and G. Chen, Int. J. of Bifurcation and Chaos **16**, 1375 (2006).
9. V. I. Nekorkin and M. G. Velarde, *Synergetic phenomena in active lattices*, Berlin, Springer-Verlag, 2002.
10. К. Г. Мишагин, В. Д. Шалфеев, Письма в ЖТФ **32**, 32 (2006).
11. M. I. Rabinovich, P. Varona, A. I. Selverston et al., Rev. of Modern Physics **78**, 1213 (2006).
12. V. B. Kazantsev, V. I. Nekorkin, V. I. Makarenko, and R. Llinas, Procs. Natl. Acad. Sci. USA **101**, 181832004 (2004).
13. R. Llinas, *I of the Vortex, From Neurons to Self*. Massachusetts, The MIT Press Cambridge, 2002.
14. E. Leznik, V. I. Makarenko, and R. Llinas, J. Neurosci **22**, 2804 (2002).
15. V. I. Makarenko and R. Llinas, Procs. Natl. Acad. Sci. USA **95**, 15747 (1998).
16. N. Schweighofer, K. Doya, H. Fukai et al., Procs. Natl. Acad. Sci. USA **101**, 4655 (2004).
17. H. Korn and P. Faure, C. R. Biologies **326**, 787 (2003).
18. J. L. Hindmarsh and R. M. Rose, Proc. R. Soc. Lond. B **221**, 87 (1984).
19. E. M. Izhikevich, *Dynamical Systems in Neuroscience: The Geometry of Excitability and Bursting*, Massachusetts, The MIT Press, 2005.
20. V. I. Arnold, V. S. Afraimovich, Yu. S. Il'yashenko, and L. P. Shilnikov, In book *Dynamical systems V. Bifurcation Theory and Catastrophe Theory*, ed. V. I. Arnold, NY, Springer-Verlag, 2004.
21. Д. Г. Захаров, Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика **13**, 109 (2005).
22. E. M. Izhikevich, Int. J. of Bifurcation and Chaos, **10**, 1171 (2000).