

Объемное отражение и объемное преломление релятивистских частиц в однородно изогнутом кристалле

Г. В. Ковалев¹⁾

North Saint Paul, MN 55109, USA

Поступила в редакцию 3 декабря 2007 г.

В рамках релятивистской классической механики исследуется рассеяние быстрых заряженных частиц в изогнутом кристалле. Полученные выражения для функции отклонения находятся в удовлетворительном согласии с экспериментами [1, 2, 3] для объемного отражения релятивистских протонов. Рассматриваются также особенности рассеяния частиц на кольцевых потенциалах в широком диапазоне прицельных параметров.

PACS: 61.85.+p29.27.–a, 41.85.–p, 45.50.Tn

В 80-х годах, изучая эффект объемного захвата релятивистских протонов в режим каналирования, Таратин и Воробьев показали возможность объемного отражения [4, 5], то есть когерентного малоуглового рассеяния частиц в сторону, противоположную изгибу кристалла на угол $\theta \lesssim 2\theta_L$ (θ_L – критический угол Линдхарда). Недавние эксперименты [1, 2, 3] подтвердили наличие этого эффекта для пучков протонов 1, 70 и 400 ГэВ в кристалле Si. Выводы работ [4, 5] базировались, в основном, на численном моделировании, поэтому цель данной работы получить аналитические выражения для функции отклонения релятивистских частиц. Может показаться, что при релятивистских энергиях и малости кристаллического потенциала ($U(r) \approx 10\text{--}100$ эВ) можно применить теорию возмущений по величине потенциала. Однако релятивистское обобщение известной классической формулы для малоуглового рассеяния в центральном поле [6]:

$$\chi = -b \int_b^\infty \frac{d\phi}{dr} \frac{dr}{\sqrt{r^2 - b^2}},$$

(b – прицельный параметр, $\phi(r) = 2U(r)E/p_\infty^2 c^2$, $U(r)$, E , p_∞ – центрально-симметричный непрерывный потенциал изогнутых плоскостей, полная энергия и импульс частицы на бесконечности) оказывается неприменимым для всего диапазона прицельных параметров. Действительно, приведенная формула представляет собой первый ненулевой член разложения классической функции отклонения

$$\chi(b) = \pi - 2b \int_{r_0}^\infty \frac{dr}{r\sqrt{r^2[1 - \phi(r)] - b^2}} \quad (1)$$

в ряд по степеням “эффективного” потенциала взаимодействия $\phi(r)$. Потенциал взаимодействия кристалла $U(r)$ является суммой потенциалов отдельных изогнутых плоскостей, концентрически расположенных в радиальном направлении с периодом d . Он не имеет сингулярностей (то есть ограничен по величине), локализован в узкой кольцевой области на расстояниях $R - Nd < r < R$, (толщина кристалла $Nd \ll R$, N – число плоскостей) и в этой области $U(r) > 0$ для положительных и $U(r) < 0$ для отрицательных рассеивающихся частиц. Вне кольцевой области он быстро стремится к нулю. Очевидно, что теория возмущений по потенциалу взаимодействия хорошо работает, если прицельный параметр $b < (R - Nd)$. Тогда область рассеяния частиц, локализованная в зоне действия потенциала, отстоит на большом расстоянии от точки поворота r_0 , определяемой из уравнения $b = r_0\sqrt{1 - \phi(r_0)}$, и корневая особенность точки поворота не дает вклада в интеграл (1). В общем случае можно показать [7, 8], что условием сходимости разложения по степеням ϕ является монотонное возрастание функции $u(r) = r\sqrt{1 - \phi(r)}$ (то есть $u(r)' > 0$) в областях r , существенных для интеграла (1). Такая монотонность достигается, если энергия и импульс релятивистской частицы удовлетворяют неравенству

$$\frac{p_\infty^2 c^2}{2E} > U(r) + \frac{r}{2} U(r)'. \quad (2)$$

Вывод этого условия опускаем, так как он повторяет Приложение работы [8] с той разницей, что там рассматривается нерелятивистский случай. Если учесть, что для больших расстояний $r \approx R$ имеет место неравенство $U(r) \ll rU(r)'$, то соотношение (2) переходит в известный критерий Цыганова [9] ($R < p_\infty^2 c^2 / U(r)'$) об исчезновении каналирования в

¹⁾e-mail: kovalevgennady@qwest.net

сильно изогнутом кристалле. Таким образом, понятно, что теория возмущений применима только в сильно изогнутых кристаллах, где каналирование отсутствует. Интересно отметить, что нерелятивистский вариант [8] условия (2) соответствует критерию отсутствия так называемого “спирального” рассеяния (“spiral” scattering), возникающего при малых энергиях в химических реакциях [10].

Поэтому ниже рассматривается точное решение задачи релятивистского рассеяния на модельном потенциале периодической системы прямоугольных колец:

$$U(r) = U_0 \begin{cases} 1, & R - id - a < r < R - id, \\ 0, & R - (i + 1)d < r < R - id - a, \\ 0, & r < R - Nd, r > R, \end{cases} \quad (3)$$

где $i = 0, 1, \dots, (N - 1)$; a, d – толщина отдельной плоскости и межплоскостное расстояние. Используя представление

$$\frac{\pi}{2} = b \int_{r_0}^{\infty} \frac{dr}{r \sqrt{r^2 [1 - \phi(r_0)] - b^2}}, \quad (4)$$

функцию отклонения частиц (1) можно переписать в виде

$$2b \int_{r_0}^{\infty} \frac{dr}{r} \left(\frac{1}{\sqrt{r^2 [1 - \phi(r_0)] - b^2}} - \frac{1}{\sqrt{r^2 [1 - \phi(r)] - b^2}} \right). \quad (5)$$

Рассмотрим диапазон малых прицельных параметров, $b < R - Nd$, когда частицы проникают во внутреннюю область потенциального кольца и пересекают каждую плоскость кристалла дважды. Эта геометрия не используется в экспериментах, поскольку требует очень тонких кристаллов. Однако такой подход к решению задачи позволяет легко вычислить точную функцию отклонения на потенциале (3) для любых прицельных параметров и, кроме того, демонстрирует интересное свойство рассеяния на потенциалах с пустым ядром, которое, как нам кажется, до сих пор не привлекло особого внимания. В этом случае точка поворота находится во внутренней области потенциального кольца, где $\phi(r_0) = 0$, и, как легко видеть из уравнения $b = r_0 \sqrt{1 - \phi(r_0)}$, расстояние наименьшего сближения с центром $r_0 = b$ (см. рис.1C,D).

Функция отклонения для таких прицельных параметров будет иметь вид

$$\chi(b) = 2b \int_b^{\infty} \frac{dr}{r} \left(\frac{1}{\sqrt{r^2 - b^2}} - \frac{1}{\sqrt{r^2 [1 - \phi(r)] - b^2}} \right). \quad (6)$$

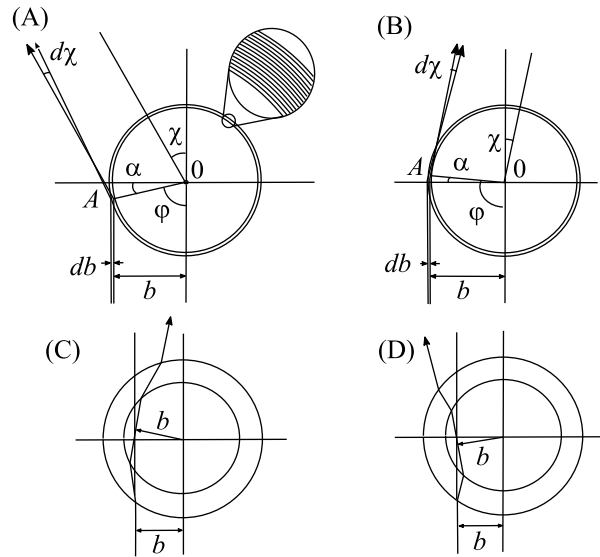


Рис.1. Рассеяние заряженных частиц на кольцевом потенциале: (A) – отражение, $\chi > 0$; (B) – преломление, $\chi < 0$. Эффект пустой сердцевин: для положительного (C) и отрицательного (D) кольцевых потенциалов

Рассмотрим произвольный положительный центрально симметричный потенциал ($\phi(r) \geq 0$). Тогда, в подынтегральном выражении (6) всегда имеем: $1/\sqrt{r^2 - b^2} \leq 1/\sqrt{r^2 [1 - \phi(r)] - b^2}$. Отсюда немедленно следует, что какая бы форма не была у положительного потенциала $\phi(r)$, для прицельных параметров $0 < b < (R - Nd)$ углы рассеяния могут быть только отрицательными, $\chi < 0$, то есть произвольный положительный потенциал действует как притягивающий. Наоборот, произвольный отрицательный потенциал, $\phi(r) \leq 0$, для этих же прицельных параметров действует как отталкивающий. Мы назовем этот кажущийся “парадокс” эффектом пустой сердцевин. Он схематично показан на рис.1C,D и на рис.2A–D для рассеяния на прямоугольном потенциале. Интерпретировать его можно разными способами, одним из которых может быть следующий. При пересечении положительного потенциала его интегральное действие таково, что частица отклоняется влево (см. рис.1A) от первичного направления, то есть испытывает отражение. В сердцевине потенциал отсутствует и, согласно законам сохранения, модуль импульса и углового момента должны совпадать с начальными значениями. Следовательно, в сердцевине траектория частицы должна касаться окружности с радиусом, равным прицельному параметру. А это возможно только, если частица, пересекая внутреннюю границу потенциала, отклонится вправо от начального направления. Полный угол отклонения равен удво-

енному углу до точки поворота, поэтому в целом поворот будет вправо, то есть частица притягивается к центру. Противоположная ситуация имеет место для отрицательного потенциала.

Введем удобные обозначения:

$$\Phi = 1 - \phi_o, \quad \phi_o = \frac{2U_o E}{p_\infty^2 c^2}, \quad \hat{r} = \frac{r}{R}, \quad \hat{b} = \frac{b}{R}, \quad \hat{a} = \frac{a}{R},$$

$$\hat{d} = \frac{d}{R}, \quad \hat{b}_i = \frac{\hat{b}}{1 - i\hat{d}}, \quad \hat{b}_a = \frac{\hat{b}}{1 - \hat{a}}, \quad \hat{b}_{ia} = \frac{\hat{b}}{1 - \hat{a} - i\hat{d}}. \quad (7)$$

Для потенциала (3) задача рассеяния решается точно и функция отклонения (6) для $b < R - Nd$ представляется в виде суммы,

$$\chi(b) = 2\alpha(b) = 2 \sum_{i=0}^{N-1} \alpha_i(b), \quad (8)$$

интегралов по областям, заполненным потенциалом:

$$\alpha_i(b) = \hat{b} \int_{1-i\hat{d}-\hat{a}}^{1-i\hat{d}} \frac{d\hat{r}}{\hat{r}} \left(\frac{1}{\sqrt{\hat{r}^2 - \hat{b}_i^2}} - \frac{1}{\sqrt{\Phi \hat{r}^2 - \hat{b}_i^2}} \right). \quad (9)$$

Интеграл (9) легко вычисляется и, что самое важное, имеет аналитическое продолжение, справедливое для всех прицельных параметров:

$$\alpha_i(b) = \arcsin\left(\frac{\hat{b}_i(\sqrt{1 - \hat{b}_i^2} - \sqrt{\Phi - \hat{b}_i^2})}{\sqrt{\Phi}}\right) -$$

$$- \arcsin\left(\frac{\hat{b}_{ia}(\sqrt{1 - \hat{b}_{ia}^2} - \sqrt{\Phi - \hat{b}_{ia}^2})}{\sqrt{\Phi}}\right). \quad (10)$$

Заметим, что имеют смысл только реальные значения функции отклонений. Поэтому, если прицельный параметр \hat{b} таков, что любой корень в (10) становится мнимым, его надо отбросить. Далее мы сделаем приближение, которое не является строго необходимым и все последующие формулы могут быть получены и без него, однако оно существенно упрощает запись и использование всех выражений. Будем считать, что углы, входящие в (10), малы, а $\Phi \approx 1$ в знаменателях (10). Тогда все \arcsin без потери точности можно отбросить и (10) можно переписать:

$$\alpha_i(b) = \hat{b}_i(\sqrt{1 - \hat{b}_i^2} - \sqrt{\Phi - \hat{b}_i^2}) -$$

$$- \hat{b}_{ia}(\sqrt{1 - \hat{b}_{ia}^2} - \sqrt{\Phi - \hat{b}_{ia}^2}). \quad (11)$$

Рассмотрим подробнее функцию отклонения (10) для одного кольца ($N = 1, i = 0$):

$$\alpha(b) = \arcsin\left(\frac{\hat{b}(\sqrt{1 - \hat{b}^2} - \sqrt{\Phi - \hat{b}^2})}{\sqrt{\Phi}}\right) -$$

$$- \arcsin\left(\frac{\hat{b}_a(\sqrt{1 - \hat{b}_a^2} - \sqrt{\Phi - \hat{b}_a^2})}{\sqrt{\Phi}}\right). \quad (12)$$

Если внутренний радиус кольца равен 0, то $\hat{a} = 1$, и два последних радикала в (12) становятся мнимыми. Согласно указанному выше правилу, они должны быть отброшены. Полученная точная функция описывает рассеяние частиц на прямоугольном цилиндрическом диске ($U_o > 0$) или яме ($U_o < 0$) [6] (см. рис.2). Далее мы рассмотрим диапазон прицельных

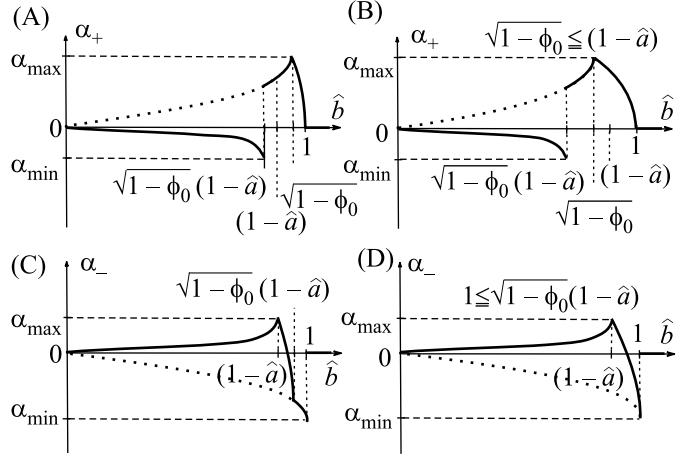


Рис.2. Функция отклонения $\alpha(\hat{b})$ на потенциальном кольце для положительных частиц: (A) – $\hat{a} > \phi_o/2$, (B) – $\hat{a} < \phi_o/2$; для отрицательных частиц: (C) – $-\hat{a} > |\phi_o|/2$, (D) – $-\hat{a} < |\phi_o|/2$. Точечные линии соответствуют рассеянию на диске ($U_o > 0$) (A), (B) и яме ($U_o < 0$) (C), (D). Область эффекта пустой сердцевинки для положительных частиц $0 < \hat{b} < \sqrt{\Phi}(1 - \hat{a})$ меньше внутреннего радиуса ($1 - \hat{a}$)

параметров, лежащий в области кольца $(1 - Nd) \leq \hat{b} \leq 1$, где, в силу малости $Nd \ll 1$, можно считать все $\hat{b}_i, \hat{b}_{ia} \cong 1$ и эти множители перед скобками в (11) также можно опустить. В указанном приближении формула (12) выглядит так:

$$\alpha(b) = (\sqrt{1 - \hat{b}^2} - \sqrt{\Phi - \hat{b}^2}) -$$

$$- (\sqrt{1 - \hat{b}_a^2} - \sqrt{\Phi - \hat{b}_a^2}). \quad (13)$$

В зависимости от величины ϕ_o (ϕ_o есть квадрат критического угла Линдхарда взятый со знаком рассеивающейся частицы) существует две последовательности критических точек, которые могут проходить прицельный параметр \hat{b} при возрастании от 0 до 1. Для положительного потенциала $U_o > 0$ ($\Phi < 1$), критические точки образуют последовательность $\sqrt{\Phi}(1 - \hat{a}) < \sqrt{\Phi} < 1$. Таким образом, функция отклонения для положительных частиц на одном кольце будет иметь вид

$$\alpha(\hat{b})_+ = \quad (14)$$

$$\begin{cases} (\sqrt{1-\hat{b}^2} - \sqrt{\Phi-\hat{b}^2}) - (\sqrt{1-\hat{b}_a^2} - \sqrt{\Phi-\hat{b}_a^2}), \\ \text{for } 0 < \hat{b} < \sqrt{\Phi}(1-\hat{a}); \\ \sqrt{1-\hat{b}^2} - \sqrt{\Phi-\hat{b}^2}, \text{ for } \sqrt{\Phi}(1-\hat{a}) < \hat{b} < \sqrt{\Phi}; \\ \sqrt{1-\hat{b}^2}, \text{ for } \sqrt{\Phi} < \hat{b} < 1; \\ 0, \text{ for } 1 < \hat{b}. \end{cases}$$

Для отрицательного потенциала $U_o < 0$ ($\Phi > 1$) последовательность критических точек другая: $(1-\hat{a}) < (1-\hat{a})\sqrt{\Phi} < 1$. Она дает функцию отклонения для рассеяния отрицательных частиц на одном кольце:

$$\alpha(\hat{b})_- = \quad (15)$$

$$\begin{cases} (\sqrt{1-\hat{b}^2} - \sqrt{\Phi-\hat{b}^2}) - (\sqrt{1-\hat{b}_a^2} - \sqrt{\Phi-\hat{b}_a^2}), \\ \text{for } 0 < \hat{b} < (1-\hat{a}); \\ \sqrt{1-\hat{b}^2} - \sqrt{\Phi-\hat{b}^2}, \text{ for } (1-\hat{a}) < \hat{b} < (1-\hat{a})\sqrt{\Phi}; \\ \sqrt{\Phi-\hat{b}^2}, \text{ for } (1-\hat{a})\sqrt{\Phi} < \hat{b} < 1; \\ 0, \text{ for } 1 < \hat{b}. \end{cases}$$

При выполнении условия $|\phi_o|/2 < \hat{a}$, функции отклонения (14), (15) изображены на рис.2А, С. Если потенциал достаточно велик $|\phi_o|/2 > \hat{a}$, то дуга отражения положительных частиц от внешней стенки изогнутой плоскости вытягивается влево и может превысить ширину кольца (и расстояние между кольцами, если рассматривается система колец). Именно этот эффект приводит к отражению релятивистских частиц в кристалле. Для отрицательных частиц, когда $|\phi_o|/2 > \hat{a}$, соответствующая дуга отражения от внутренней стенки потенциала сдвигается вправо, приводя к сужению области прицельных параметров для преломления отрицательно заряженных частиц. Однако область преломления, хотя и узкая, всегда присутствует. Эти два варианта изображены на рис.2В, Д. Если в (14) и (15) подставить соответственно: $\hat{b} = \sqrt{\Phi}$, $\hat{b} = \sqrt{\Phi}(1-\hat{a})$ и $\hat{b} = (1-\hat{a})$, $\hat{b} = 1$, то мы получим максимальный и минимальный углы отклонения положительных и отрицательных частиц:

$$\begin{aligned} \alpha_{\max+} &= -\alpha_{\min-} = \sqrt{|\phi_o|}, \\ \alpha_{\min+} &= -\alpha_{\max-} = \frac{|\phi_o|}{2\sqrt{2\hat{a}}} - \sqrt{|\phi_o|}. \end{aligned} \quad (16)$$

Подобным образом из выражений (8), (11) получают функции отклонений для системы изогнутых плоскостей, образующих кристалл. При этом, суммирование в (8) должно производиться от 0 до $k-1$, где k – номер радиального периода, в котором находится точка поворота. Последовательности критических точек, упомянутые перед уравнениями (14), (15) и сами функции отражения (14), (15) будут относиться

к k -му периоду. Из-за недостатка места мы опускаем формулы для функций отражения в этом случае, но соответствующие им графики приведены на рис.3.

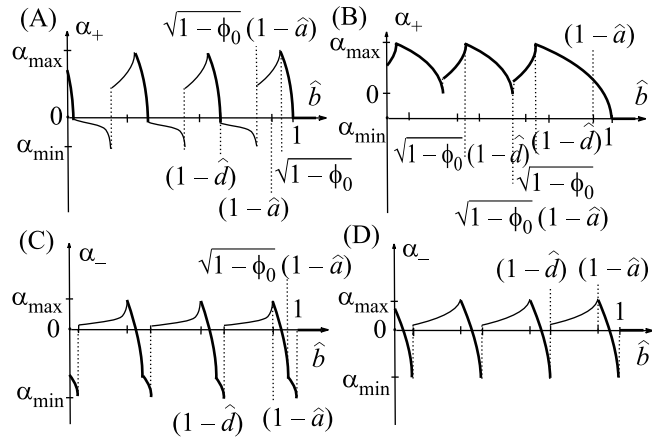


Рис.3. Функция отклонения для кольцевого кристалла. Положительные частицы: (А)- $\hat{a} > \phi_o/2$, (В)- $\hat{d} < \phi_o/2$; отрицательные частицы: (С)- $\hat{a} > |\phi_o|/2$, (Д)- $\hat{d} < |\phi_o|/2$

В периодической системе изогнутых плоскостей существуют два параметра длины: \hat{a} , \hat{d} ($\hat{a} < \hat{d}$). Поэтому могут существовать 3 различных варианта кривых отличающихся тем, что в первом $-\hat{d} > \hat{a} > \phi_o/2$, во втором $-\hat{d} > \phi_o/2 > \hat{a}$, и в третьем $-\phi_o/2 > \hat{d} > \hat{a}$. Окончательный результат для функции отражения в 1-м и 3-м вариантах показан на рис.3.

Как отмечалось выше, если следующее условие выполняется:

$$\phi_o > \frac{2d}{R}, \quad (17)$$

области преломления положительно заряженных частиц исчезают в картине функции отклонения (см. рис.3В). Поскольку этот эффект представляет практический интерес для управления пучков релятивистских частиц, вычислим в этих условиях средний угол отражения. Для грубой оценки используем самое крайнее кольцо, где функция отклонения имеет наиболее простой вид (14). Средний угол отклонения на интервале прицельных параметров $\sqrt{\Phi} < \hat{b} < 1$ будет определяться интегралом:

$$\bar{\alpha}_+ = \frac{1}{1-\sqrt{\Phi}} \int_{\sqrt{\Phi}}^1 \sqrt{1-\hat{b}^2} d\hat{b} \cong \frac{2\sqrt{\phi_o}}{3}. \quad (18)$$

Таким образом средний угол отражения $\chi_+ = 2\bar{\alpha}_+ = 4\sqrt{\phi_o}/3$, что составляет $1.33 \cdot \theta_L$. Можно получить более точную оценку угла отражения, если усреднить по любому внутреннему периоду функции отражения. Мы воспользуемся вторым от края периодом прицельных параметров $(1-\hat{d})\sqrt{\Phi} < \hat{b} < \sqrt{\Phi}$

(см. рис.3В). При этом нет необходимости вычислять всю сумму в выражении (8), достаточно знать только функцию отражения для двух крайних колец. Указанная задача решается путем взятия двух интегралов:

$$I_1 = \int_{(1-\hat{a})\sqrt{\Phi}}^{(1-\hat{a})\sqrt{\Phi}} \left((\sqrt{1-\hat{b}^2} - \sqrt{\Phi-\hat{b}^2}) - (\sqrt{1-\hat{b}_a^2} - \sqrt{\Phi-\hat{b}_a^2}) + \sqrt{1-\hat{b}_1^2} \right) d\hat{b} \quad (19)$$

и

$$I_2 = \int_{(1-\hat{a})\sqrt{\Phi}}^{\sqrt{\Phi}} (\sqrt{1-\hat{b}^2} - \sqrt{\Phi-\hat{b}^2}) d\hat{b}, \quad (20)$$

с последующим разложением по малым величинам \hat{a}, \hat{d}, ϕ_o . В результате получаем выражение $\bar{\alpha}_+ = (I_1 + I_2)/(\hat{d}\sqrt{\Phi})$ для среднего угла отклонения:

$$\bar{\alpha}_+ = \frac{1}{3\hat{d}} \left(\phi_o^{3/2} + (2\hat{d} + \phi_o)^{3/2} + (2\hat{d} - 2\hat{a})^{3/2} - 2\sqrt{2}\hat{d}^{3/2} - (2\hat{d} - 2\hat{a} + \phi_o)^{3/2} - (2\hat{a} - 2\hat{d} + \phi_o)^{3/2} \right). \quad (21)$$

Эксперимент с 1 ГэВ протонами [2] в кристалле кремния Si $\langle 111 \rangle$ с радиусом изгиба $R = .33$ м дает средний угол отражения 236 ± 6.0 мкрад. Используя данные $\phi_o = \theta_L^2 = 0.289 \cdot 10^{-7}$, $a = 0.78 \text{ \AA}$, $d = 3.136 \text{ \AA}$, из (21) получаем $\chi_+ = 2 \cdot \bar{\alpha}_+ = 318.8$ мкрад. Заметим, что грубая формула (18) дает более близкое к измеренной величине значение $\chi_+ = 2 \cdot \bar{\alpha}_+ = 226.6$ мкрад. Эксперимент с 70 ГэВ протонами [11, 1] в кристалле кремния Si $\langle 111 \rangle$ с радиусом изгиба $R = 1.7$ м дает средний угол отражения 39.5 ± 2.0 мкрад. Используя данные $\phi_o = \theta_L^2 = 0.58 \cdot 10^{-9}$, $a = 0.78 \text{ \AA}$, $d = 3.136 \text{ \AA}$, из формулы (21) получаем величину $\chi_+ = 37.3$ мкрад, близкую к измеренной. Формула (18) дает меньший угол 32.0 мкрад. Для последнего эксперимента CERN с отражением 400 ГэВ протонов [3] в кристалле Si ориентированным в направлении $\langle 110 \rangle$ ($R = 18.5$ м, $\phi_o = \theta_L^2 = 0.1132 \cdot 10^{-9}$, $a = 0.48 \text{ \AA}$, $d = 1.92 \text{ \AA}$) и в направлении $\langle 111 \rangle$

($R = 11.5$ м, $\phi_o = \theta_L^2 = 0.1008 \cdot 10^{-9}$, $a = 0.78 \text{ \AA}$, $d = 3.136 \text{ \AA}$) из формулы (21) получаем $\chi_+ = 2 \cdot \bar{\alpha}_+ = 19.0$ мкрад и $\chi_+ = 2 \cdot \bar{\alpha}_+ = 16.0$ мкрад, соответственно. Грубая оценка (18) дает величины 14.1 мкрад и 13.3 мкрад очень близкие к экспериментально измеренным 13.9 ± 0.2 мкрад и 13.0 мкрад для соответствующих ориентаций $\langle 110 \rangle$ и $\langle 111 \rangle$.

Из сопоставления теоретических оценок и экспериментальных результатов видно, что оценочная формула (18) дает меньшее значение угла отражения во всем диапазоне измеренных энергий, чем предположительно более точная (21). Экспериментальные данные [11, 1] достаточно хорошо описываются формулой (21), однако результаты [2], [3] ближе лежат к оценке (18), что указывает на необходимость более детального анализа условий проведения экспериментов и точности измерений.

Автор признателен Ю.М. Иванову за возможность ознакомиться с препринтом [11].

1. Yu. M. Ivanov, A. A. Petrunin, V. V. Skorobogatov et al., Phys. Rev. Lett. **97**, 144801 (2006).
2. Ю. М. Иванов, Н. Ф. Бондарь, Ю. А. Гавриков и др., Письма в ЖЭТФ, **84**, 445 (2006).
3. W. Scandale, D. A. Still, A. Carnera et al., Phys. Rev. Lett. **98**, 154801 (2007).
4. A. M. Taratin and S. A. Vorobiev, Phys. Lett. A **119**, 425 (1987).
5. A. M. Taratin and S. A. Vorobiev, Nucl. Instrum. Meth. B **26**, 512 (1987).
6. L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *Mechanics*, Butterworth-Heinemann, 3rd Ed., NY, 1976.
7. F. T. Smith, R. P. Marchi, and K. G. Dedrick, Phys. Rev. **150**, 79 (1966).
8. W. H. Miller, J. Chemical Physics **51**, 3631 (1969).
9. E. N. Tsyganov, *Fermilab, TM-682*, page 5, 1976.
10. R. Newton, *Scattering Theory of Waves and Particles*, 2nd Ed., Springer-Verlag, New York, 1982.
11. Yu. M. Ivanov, A. A. Petrunin, V. V. Skorobogatov et al., Technical Report 2649, St. Pererburg Institute of Nuclear Physics, Gatchina, 2005.