

## Фотогальванический эффект в ферромагнетиках с некопланарным распределением намагниченности

А. А. Фраерман<sup>1)</sup>, О. Г. Удалов

Институт физики микроструктур РАН, 603950 Нижний Новгород, Россия

Поступила в редакцию 6 декабря 2007 г.

После переработки 25 декабря 2007 г.

Предсказан фотогальванический эффект (ФГЭ), возникающий в ферромагнитных материалах. ФГЭ заключается в возникновении постоянного электрического тока в ферромагнитном образце под действием высокочастотного переменного электрического поля. Построена феноменологическая теория фотогальванического эффекта в ферромагнетиках и предложена простейшая микроскопическая модель, поясняющая возникновение фотогальванического эффекта в среде с геликоидальной магнитной структурой. Причиной возникновения ФГЭ является нарушение симметрии по отношению к обращению направления движения электрона в среде с некопланарным распределением намагниченности.

PACS: 72.25.Ba, 72.40.+w

Изучению связи спиновых и пространственных степеней свободы носителей тока в ферромагнетиках, а также исследованию возможности использования этих эффектов посвящено большое количество работ (см., например, обзор [1]). Основное внимание при этом сосредоточено на системах с коллинеарным и неколлинеарным распределением намагниченности. Системы же с некопланарным распределением намагниченности, реализующиеся в некоторых редкоземельных металлах и сплавах [2, 3], а также в ферромагнитных наночастицах [4], практически не изучены. Однако в таких системах должны существовать качественно новые физические эффекты. Действительно, в рамках (s-d)-модели Вонсовского электрон проводимости в ферромагнитном металле описывается уравнением Шредингера с эффективным зеемановским слагаемым [5]. Данное уравнение не инвариантно относительно комплексного сопряжения (обращения направления движения частицы), если распределение намагниченности некопланарное. Это приводит к тому, что ограничение на четность спектра электронов снимается, и спектр может быть произвольной функцией квазиимпульса. Отсутствие симметрии спектра электронов является особенностью некопланарных систем и качественно отличает их от коллинеарных. На одно из следствий нарушения симметрии спектра электронов в некопланарных магнитных структурах было указано в работах [6, 7], где теоретически предсказано существование незатухающего электрического тока в мезоскопическом кольце с магнитной текстурой.

Величина и направление этого тока пропорциональны степени некопланарности распределения намагниченности. Необходимым условием возникновения этого эффекта является наличие квантования спектра, поэтому при увеличении радиуса кольца величина тока стремится к нулю даже без учета неупругого рассеяния электронов.

В работе [8] рассчитана статическая вольт-амперная характеристика макроскопической среды с геликоидальной магнитной структурой и показано, что такая среда обладает выпрямляющими свойствами. Предсказанный в [8] диодный эффект обусловлен асимметрией спектра электронов и асимметрией их рассеяния на примесях и фононах. Эти механизмы выпрямления должны работать при любой частоте изменения электромагнитного поля. Однако в области высоких частот появляется дополнительный, не рассмотренный в [8], механизм выпрямления, связанный с переходами электронов между спиновыми подзонами. Изучению этого механизма возникновения эффекта выпрямления посвящена данная работа. Эффект возникновения постоянного электрического тока под воздействием высокочастотного электромагнитного поля называют фотогальваническим эффектом (ФГЭ) [9]. Отметим, что ФГЭ для полупроводников с сильным спин-орбитальным взаимодействием был описан в работе [10]. Причина его возникновения – появление в спектре электронов линейного по квазиимпульсу слагаемого из-за спин-орбитального взаимодействия. В настоящей работе рассмотрен ФГЭ, обусловленный обменным взаимодействием.

Работа состоит из двух частей. В первой части рассмотрена феноменологическая теория фотогальва-

<sup>1)</sup>e-mail: andr@ipm.sci-nnov.ru

нического эффекта в неоднородных магнитных средах. Во второй части изложена простая микроскопическая модель возникновения фотогальванического эффекта в среде с некомпланарной геликоидальной магнитной структурой.

**Феноменологическая теория фотогальванического эффекта в неоднородной магнитной среде.** Рассмотрим среду с распределением намагниченности  $\mathbf{M}(\mathbf{r})$ . Квадратичные по электрическому полю  $\mathbf{E}$  компоненты тока  $\mathbf{j}$  определяются формулой

$$j_i = \lambda_{ijk}(\omega) E_j E_k^*, \quad (1)$$

где  $E_j$  – компоненты амплитуд переменного электрического поля, знак \* означает комплексное сопряжение,  $\omega$  – частота изменения поля,  $\lambda_{ijk}$  – тензор третьего ранга, характеризующий свойства среды и зависящий от распределения намагниченности. Так как ток предполагается постоянным, то выражение (1) можно представить в виде [9]

$$j_i = \lambda_{ijk}^s E_j E_k^* + i \lambda_{ii}^{\alpha s} [\mathbf{E} \times \mathbf{E}^*]_i. \quad (2)$$

Здесь  $\lambda_{ijk}^s$  – действительная часть тензора  $\lambda$ . Мнимая часть тензора  $\lambda$  антисимметрична по индексам  $j$  и  $k$  и может быть записана в виде  $\lambda_{ii}^{\alpha s} \mu_{ikj}$ ,  $\mu_{ikj}$  – тензор Леви-Чивита. Согласно терминологии, введенной в [9], первое слагаемое (2) описывает линейный, а второе – циркулярный фототок.

Рассмотрим ограничения, накладываемые на тензор  $\lambda_{ijk}^s$ . При обращении координат знак тока изменяется на противоположный, поэтому тензор линейного фототока  $\lambda_{ijk}^s$  должен содержать нечетное число производных компонент вектора намагниченности по координатам. Будем полагать, что в исследуемой системе существует только обменное взаимодействие. Это означает, что выражение для тока должно быть составлено таким образом, чтобы магнитные и координатные векторные индексы сворачивались каждые только между собой, но не друг с другом [11]. Кроме того, если возникновение фотогальванического эффекта не связано с диссипативными процессами, то число векторов намагниченности в искомом тензоре должно быть нечетным, чтобы сохранялась симметрия по отношению к обращению времени. Выражение для линейного фототока с пространственными производными самого низкого порядка, удовлетворяющее указанным выше условиям, имеет вид

$$j_i = \alpha \left( \mathbf{M}, \left[ \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial x_i} \times \frac{\partial^2 \mathbf{M}}{\partial x_j \partial x_k} \right] \right) E_j E_k^*. \quad (3)$$

$\alpha$  – константа, зависящая от частоты изменения электрического поля  $\omega$ . Из (3) следует, что тензор

$\lambda_{ijk}^s$  отличен от нуля только в случае некомпланарного распределения намагниченности.

Тензор циркулярного фототока  $\lambda_{ii}^{\alpha s}$  меняет знак при пространственной инверсии и не меняет знака при обращении времени. Это означает, что его можно построить как произведение четного числа компонент вектора намагниченности или их производных по координатам, при этом число производных по координатам должно быть нечетное. В изотропной среде тензор циркулярного фототока имеет вид

$$\lambda_{ii}^{\alpha s} = \chi(\mathbf{M}, \text{rot} \mathbf{M}) \hat{\delta}_{ii}, \quad (4)$$

где  $\hat{\delta}_{ii}$  – единичный тензор, а  $\chi$  – истинный скаляр. Из (4) следует, что в отличие от линейного фототока (3), циркулярный фототок не может быть обусловлен обменным взаимодействием, поскольку выражение (4) не инвариантно относительно вращения вектора магнитного момента.

Далее мы будем обсуждать только линейный фототок, описываемый выражением (3), так как он может быть обусловлен наличием обменного взаимодействия в среде. В качестве примера рассчитаем фототок в среде с геликоидальной магнитной структурой. Распределение намагниченности в такой среде описывается формулой

$$\mathbf{M}(\mathbf{r}) = \left( \sqrt{1 - m^2} \cos(qz), \sqrt{1 - m^2} \sin(qz), m \right). \quad (5)$$

Подставив (5) в (3), получим, что при воздействии линейно поляризованного (вдоль оси геликоида – оси  $z$ ) электромагнитного излучения в среде течет постоянный ток вдоль оси спирали

$$j_z = \alpha m (1 - m^2) q^3 E_z^2. \quad (6)$$

Направление линейного фототока определяется киральностью геликоида (знаком  $q$ ) и направлением  $z$ -компоненты намагниченности  $m$ . Из выражения (6) видно, что, если  $qm(1 - m^2) = 0$  (распределение намагниченности компланарно), то ток не возникает.

**Микроскопическая теория линейного ФГЭ в среде с геликоидальным распределением намагниченности.** Для понимания микроскопического механизма предсказанного эффекта рассмотрим задачу о собственных функциях и спектре электронов в среде с геликоидальной магнитной структурой вида (5). Для описания поведения электронов мы будем использовать  $(s - d)$ -модель Вонсовского [5]. В рамках этой модели взаимодействие  $s$ -электрона проводимости с магнитным полем, создаваемым локализованными  $d$ -электронами, описывается слагаемым Паулевского типа  $J(\hat{\sigma} \mathbf{M})$ , где  $\hat{\sigma}$  – вектор матриц Паули. Под  $J$  понимается эффективная обменная

константа, а под  $\mathbf{M}$  – единичный вектор, направленный вдоль локального магнитного момента. Запишем уравнение Шредингера для электрона проводимости:

$$-\Delta\Psi(\mathbf{r}) - \tilde{J}\mathbf{M}(z)\hat{\sigma}\Psi(\mathbf{r}) = \tilde{\varepsilon}\Psi(\mathbf{r}). \quad (7)$$

Здесь  $\tilde{J} = J/(\hbar^2/2m_e)$ ,  $\tilde{\varepsilon} = \varepsilon/(\hbar^2/2m_e)$ ,  $m_e$  – масса электрона. Из этого уравнения нетрудно видеть, что в случае компланарного распределения намагниченности ( $m = 0$  или  $m = 1$ , или  $q = 0$ ) всегда можно найти такую систему координат, в которой данное уравнение инвариантно относительно комплексного сопряжения и, кроме того, замена  $z$  на  $-z$  эквивалентна вращению спиновой системы координат. В этом случае спектр частиц будет четной функцией казиимпульса. Если распределение намагниченности некомпланарно, то данное уравнение становится неинвариантным по отношению к замене  $z \rightarrow -z$  и комплексному сопряжению. Это снимает ограничение на четность спектра электронов в такой системе. Как показано в работе [12], волновые функции электрона в магнитной спирали есть плоские волны. При этом состояние электрона в спирали определяется квазиимпульсом  $\mathbf{k}$  и индексом ветки (“+” или “-”)

$$\Psi_{\mathbf{k}}^{\pm}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{1 + (\delta^{\pm}(k_z))^2}} \begin{pmatrix} \delta^{\pm}(k_z)e^{-i(q/2)z} \\ e^{i(q/2)z} \end{pmatrix} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}, \quad (8)$$

$$\delta^{\pm}(k) = \frac{m\tilde{J} - qk_z \pm \sqrt{q^2k_z^2 + \tilde{J}^2 - 2\tilde{J}mqk_z}}{\tilde{J}(1 - m^2)^{1/2}}. \quad (9)$$

Спектр частиц  $\tilde{\varepsilon}^{\pm}(\mathbf{k})$  в магнитной спирали определяется формулой:

$$\begin{aligned} \tilde{\varepsilon}^{\pm}(\mathbf{k}) &= k_x^2 + k_y^2 + \tilde{\varepsilon}_z^{\pm}(k_z) = \\ &= k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 \pm \sqrt{q^2k_z^2 + \tilde{J}^2 - 2\tilde{J}mqk_z}. \end{aligned} \quad (10)$$

Отсюда следует, что при  $qm \neq 0$  спектр есть несимметричная функция волнового числа  $k_z$ . Данный факт является следствием неинвариантности уравнения (7) по отношению к инверсии системы координат и комплексному сопряжению. Отметим также, что средние значения оператора спина  $\hat{\sigma}$ , вычисленные с помощью волновых функций (8), зависят от волнового числа  $k_z$ , что свидетельствует о связи спиновых и орбитальных степеней свободы электрона. Важным параметром в данной задаче является величина  $\beta = k_z q / \tilde{J}$ , представляющая отношение периода прецессии спина вокруг эффективного магнитного поля

к времени пролета электроном одного периода спирали и характеризующая степень адиабатичности его движения. При  $\beta \gg 1$  влияние обменного поля на движение электрона мало, поэтому далее мы будем рассматривать случай почти адиабатического движения, соответствующий условию  $\beta \ll 1$ . В линейном по параметру  $\beta$  приближении обе ветки спектра становятся параболическими, однако минимумы этих парабол сдвинуты. Отметим, что для получения ФГЭ достаточно учесть линейные по параметру  $\beta$  слагаемые в спектре, в отличие от диодного эффекта в области низких частот, для получения которого необходимо учитывать кубические по  $\beta$  слагаемые [8].

Разница энергий между спиновыми подзонами линейно зависит от квазиимпульса

$$\Delta\tilde{\varepsilon}_z(k_z) = \tilde{\varepsilon}_z^+(k_z) - \tilde{\varepsilon}_z^-(k_z) = 2\tilde{J} - 2qm k_z. \quad (11)$$

Уровень Ферми пересекает функции  $\tilde{\varepsilon}_z^{\pm}(k_z)$  в точках

$$k_z^{\pm>} = \pm qm/2 + \sqrt{\tilde{\varepsilon}_f \mp \tilde{J}}, \quad (12)$$

$$k_z^{\pm<} = \pm qm/2 - \sqrt{\tilde{\varepsilon}_f \mp \tilde{J}}. \quad (13)$$

Легко найти проекцию групповой скорости электрона на ось спирали  $z$  на каждой ветке

$$v_z^{gr\pm}(k_z) = \frac{\hbar}{2m_e} \frac{\partial\tilde{\varepsilon}^{\pm}}{\partial k_z} = \frac{\hbar}{m_e} (k_z \mp qm/2). \quad (14)$$

Из выражения (14) следует, что групповая скорость электрона на нижней ветке всегда больше групповой скорости электрона на верхней ветке спектра при одинаковом значении квазиимпульса. При переходе электрона с нижней ветки спектра на верхнюю (без изменения квазиимпульса) скорость электрона изменяется. При этом изменение скорости электрона не связано с передачей импульса фотона электрону, но с изменением его спинового состояния, которое также изменяется при переходе.

Оператор взаимодействия электрона с полем электромагнитной волны в линейном приближении имеет вид

$$\hat{H}_{em} = -\frac{e}{2m_e c} (\hat{\mathbf{p}}\mathbf{A} + \mathbf{A}\hat{\mathbf{p}}), \quad (15)$$

где

$$\mathbf{A} = -\frac{ic}{2\omega} (\mathbf{E}_0 e^{i\mathbf{k}_e \mathbf{r} - i\omega t} - \mathbf{E}_0^* e^{-i(\mathbf{k}_e \mathbf{r} - i\omega t)})$$

– векторный потенциал, описывающий плоскую монохроматическую волну (использована калибровка

$\varphi = 0$ , где  $\varphi$  – скалярный потенциал),  $\hat{\mathbf{p}} = -i\hbar\nabla$  – оператор импульса,  $e$  – заряд электрона,  $\omega$  – частота электромагнитной волны,  $c$  – скорость света,  $\mathbf{k}_e$  – волновой вектор;  $\mathbf{E}_0 = E\xi$ , при этом полагаем, что  $\mathbf{E}_0$  – действительный вектор. Для вероятности перехода из нижней подзоны в верхнюю под действием возмущения (15) имеем

$$W_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}^{\pm} = \frac{2\pi}{\hbar} \left( \frac{e\hbar E}{2m_e\omega} \right)^2 (q\xi_z)^2 \frac{J^2(1-m^2)}{(\hbar\omega)^2} \times \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}')\delta(\Delta\varepsilon_z(k_z) - \hbar\omega). \quad (16)$$

Возможность перехода электронов из одного спинового состояния в другое под воздействием линейно-поляризованного переменного электрического поля обусловлена неоднородностью магнитной структуры (при  $q = 0$  переходы исчезают). Из формулы (16) также следует, что переходы происходят только в электрическом поле, направленном вдоль оси магнитной спирали.

Электронный газ, находящийся в термодинамическом равновесии, имеет нулевую суммарную групповую скорость. Однако под воздействием переменного электромагнитного излучения электроны начнут переходить с одной ветки спектра на другую, и функция распределения электронов по состояниям станет неравновесной (рис.1). Суммарная группо-

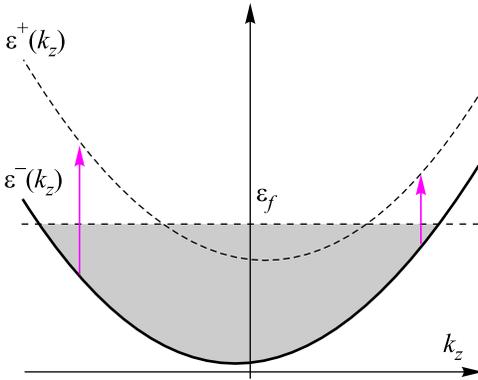


Рис.1. Переходы электронов с нижней ветки на верхнюю под воздействием электромагнитной волны

вая скорость электронов будет отличной от нуля, что означает возникновение электрического тока. Важно отметить, что асимметрия спектра является не единственной особенностью некомпланарных систем. Отсутствие симметрии по отношению к обращению направления движения проявляется и в асимметрии процессов рассеяния, что также может приводить к выпрямлению тока в рассматриваемой системе [8]. Однако в случае  $\beta \ll 1$  асимметрия процессов рассеяния возникает в третьем порядке по  $\beta$ , тогда как

асимметрия спектра линейна по этому параметру. Поэтому в приближении  $\beta \ll 1$  асимметрию процессов рассеяния можно не учитывать.

Найдем поправки к функции распределения электронов по скоростям, связанные с воздействием электромагнитной волны на электроны.

$$f^{\pm}(\mathbf{k}) = f^{(0)\pm}(\mathbf{k}) + f^{(1)\pm}(\mathbf{k}), \quad (17)$$

$f^{\pm}(\mathbf{k})$  – функция распределения электронов по состояниям ( $\pm$  обозначает ветку спектра, на которой находится электрон). При этом  $f^{(0)\pm}(\mathbf{k})$  – равновесная функция распределения, а  $f^{(1)\pm}(\mathbf{k})$  – добавка, возникающая под воздействием переменного электромагнитного излучения. Уравнение Больцмана для функции  $f^{(1)\pm}(\mathbf{k})$  имеет вид

$$-\frac{f^{(1)\pm}(\mathbf{k})}{\tau} = \int d^3k' W_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}^{\pm} (f^{(0)\pm}(\mathbf{k}) - f^{(0)\mp}(\mathbf{k}')), \quad (18)$$

$\tau$  – время релаксации. Будем считать, что температура  $T$  низкая, и выполняется условие  $k_b T \ll 2J$  ( $k_b$  – постоянная Больцмана), при котором переходы будут идти только с нижней ветки на верхнюю. Определив из (18) поправку к функции распределения, вычислим ток, возникающий в среде при воздействии на нее переменного электромагнитного излучения в случае  $\beta \ll 1$ ,  $m \ll 1$

$$j_z = -\frac{eqm\tau}{4\pi^2 m_e} \left( \frac{e\hbar E}{2m_e\omega} \right)^2 (q\xi_z)^2 \frac{J^2}{(\hbar\omega)^2} \times \int \Lambda(\mathbf{k}) \delta(\Delta\varepsilon_z(k_z) - \hbar\omega) d^3k, \quad (19)$$

Компоненты тока, перпендикулярные оси спирали, равны нулю. Функция  $\Lambda(\mathbf{k}) = f^{(0)-}(\mathbf{k}) - f^{(0)+}(\mathbf{k})$  ограничивает возможные значения  $k_z$ , для которых переходы разрешены и, соответственно, определяет диапазон частот электромагнитного излучения (центральная частота  $\omega_c = \hbar\tilde{J}/m_e$ , а ширина диапазона  $\Delta\omega \approx m q \sqrt{\varepsilon_f} \frac{\hbar}{m_e}$ ), в котором возможен фотогальванический эффект.

Диапазон частот, в котором возможны переходы, можно разбить на три области:

$$\begin{aligned} 2\frac{\hbar}{m_e}(\tilde{J} - qmk_z^{+>}) < \omega < 2\frac{\hbar}{m_e}(\tilde{J} - qmk_z^{->}), \\ 2\frac{\hbar}{m_e}(\tilde{J} - qmk_z^{+<}) < \omega < 2\frac{\hbar}{m_e}(\tilde{J} - qmk_z^{+>}), \\ 2\frac{\hbar}{m_e}(\tilde{J} - qmk_z^{-<}) < \omega < 2\frac{\hbar}{m_e}(\tilde{J} - qmk_z^{+<}). \end{aligned} \quad (20)$$

В крайних областях ток описывается формулой

$$j_z = -\frac{e\tau(q\xi_z eE)^2}{8\pi^2 m_e} \text{Sign}(qm) \frac{J^2}{(\hbar\omega)^2} \frac{(\varepsilon_f - \varepsilon_z^{\pm}(k_z(\omega)))}{(\hbar\omega)^2}, \quad (21)$$

где связь между  $k_z$  и  $\omega$  определяется  $\delta$ -функцией, стоящей под интегралом в (19). В центральной области формула для тока имеет вид

$$j_z \approx -\frac{e\tau}{32\pi^2\hbar^2} \text{Sign}(qm) \frac{q}{k_f} \beta (eE)^2. \quad (22)$$

График частотной зависимости тока представлен на рис.2. Величина фототока не зависит от степени не-

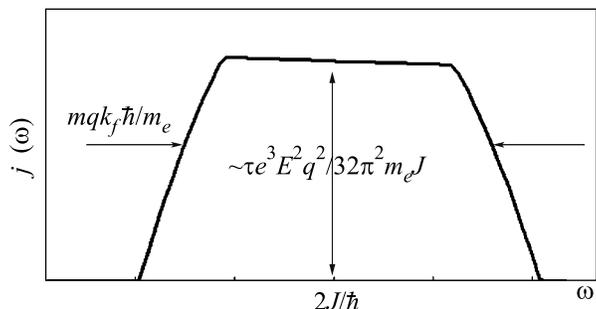


Рис.2. Частотная зависимость фотогальванического эффекта

компланарности ( $qm$ ), но диапазон частот излучения, в котором возможны переходы, линейно зависит от этой величины. Поэтому при  $qm \rightarrow 0$  (то есть переходе к компланарному распределению намагниченности) величина фототока также стремится к нулю.

Если ширина спектра излучения, падающего на систему, превосходит интервал частот, в котором существуют переходы электронов, то интегральный фототок может быть приближенно описан формулой

$$j_z^{int} \approx -e^3 \frac{\tau}{\hbar m_e} \frac{1}{32\pi^2} q^2 m \beta E_\omega^2. \quad (23)$$

При получении этой формулы предполагалось, что спектральная плотность интенсивности падающего излучения одинакова во всем интервале частот, где возможны переходы, и равна  $E_\omega^2$ . Отметим, что данная формула по своей структуре совпадает с выражением (6), полученным при феноменологическом рассмотрении.

Отметим, что рассмотренный в данной работе механизм выпрямления должен доминировать в области резонансных частот над другими механизмами, рассмотренными в работе [8], так как он линеен по параметру адиабатичности  $\beta$ , тогда как рассмотренные в [8] кубичны по этому параметру.

Итак, в данной работе теоретически показано, что в магнитных материалах с некомпланарным распре-

делением намагниченности может возникать фотогальванический эффект. Рассмотрена простая микроскопическая модель, указывающая на механизм возникновения данного эффекта в геликоидальной магнитной структуре при достаточно высоких частотах электрического поля, воздействующего на образец. Установлено, что эффект обусловлен асимметричностью процессов перехода электрона между спиновыми подзонами в некомпланарном ферромагнетике и, в конечном итоге, связан с нарушением симметрии по отношению к обращению направления движения электрона в такой среде. Этот эффект носит резонансный характер ( $\hbar\omega = 2J$ ) и должен наблюдаться в узком диапазоне частот (20), ширина которого пропорциональна степени некомпланарности распределения намагниченности.

Авторы благодарят М.В. Сапожникова и А.С. Мельникова за полезные обсуждения. Работа выполнена при поддержке программы Минобрнауки “Низкоразмерные полупроводниковые и металлические структуры спинтроники” и гранта Российского фонда фундаментальных исследований # 07-02-01321-а.

1. I. Zutic, J. Fabian, and S.D. Sarma, Rev. Mod. Phys. **76**, 323 (2004).
2. W. C. Koehler, J. W. Cable, M. K. Wilkinson et al., Phys. Rev. **151**, 414 (1966).
3. Y. Ishikawa, G. Shirane, J. A. Tarvin et al., Phys. Rev. B **16**, 4956 (1977).
4. R. P. Cowburn, D. K. Koltsov, A. O. Adeyeye et al., Phys. Rev. Lett. **83**, 1042 (1999).
5. С. В. Вонсовский, *Магнетизм*, М.: Наука, 1971.
6. D. Loss, P. Goldbart, and A. V. Balatsky, Phys. Rev. Lett. **65**, 1655 (1990).
7. G. Tatara and H. Kohno, Phys. Rev. B **67**, 113316 (2003).
8. A. A. Fraerman and O. G. Udalov, Phys. Rev. B (в печати) (//Cond-mat/0612327).
9. В. И. Белиничер, Б. И. Стурман, УФН **130**, 415 (1980).
10. S. D. Ganichev, E. L. Ivchenko, S. N. Danilov et al., Phys. Rev. Lett. **86**, 19, 4358 (2001).
11. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Теоретическая физика*, т. 8. *Электродинамика сплошных сред*, М.: Наука, 1982.
12. M. Calvo, Phys. Rev. B **19**, 5507 (1978).