Письма в ЖЭТФ, том 87, вып. 6, с. 385 – 390 © 2008 г. 25 марта

Выполнение квантового алгоритма поиска порядка подстановки на двух кудитах

В. Е. Зобов, В. П. Шауро, А. С. Ермилов*

Институт физики им. Л.В. Киренского Сибирского отд. РАН, 660036 Красноярск, Россия

**Сибирский федеральный университет, 660041 Красноярск, Россия*

Поступила в редакцию 24 января 2008 г.

После переработки 12 февраля 2008 г.

Предложена квантовая схема для выполнения алгоритма поиска порядка подстановки на двух кудитах с числом уровней d_1 и d_2. Рассчитана последовательность радиочастотных импульсов для реализации алгоритма на двух квадрупольных ядрах $I_1 = 7/2$ ($d_1 = 8$) и $I_2 = 3/2$ ($d_2 = 4$) и выполнено численное моделирование работы алгоритма. Найден способ получения квазичистого состояния. Проведено сравнение со случаем реализации алгоритма методами ЯМР на пяти кубитах.

PACS: 03.67.Lx

Введение. Квантовые вычисления на d-уровневых базовых элементах (кудитах) при $d > 2$ могут оказаться предпочтительными. Например, для получения вычислительного базиса заданного размера кудитов требуется меньше [1–4], чем кубитов, поэтому ими легче управлять. Ожидаются и другие преимущества. Однако квантовые вычисления на кудитах еще недостаточно изучены. Хотя доказано [1, 5], что с помощью универсального набора одно и двухкудитных элементарных логических операторов (вентилей) [3, 6, 7] можно выполнить любой алгоритм. Но получено очень мало конкретных квантовых схем, доведенных до элементарных операций, допускающих реализации экспериментальными средствами. Так, например, на четырех уровнях квадрупольного ядра Na в работе [8] экспериментально реализован алгоритм поиска, в работе [9] – алгоритм Дойча, а в работе [10] на 8 уровнях ядра Cs организован сумматор. В перечисленных работах не используется понятие кудита, а оперируют с виртуальными кубитами [2].

В предлагаемой работе на двух кудитах изучается алгоритм поиска порядка подстановки, который ранее был реализован экспериментально методами ЯМР на пяти кубитах [11]. Такой алгоритм является основой известного квантового алгоритма факторизации Шора, продемонстрированного теми же авторами в их следующей работе [12] на 7 кубитах.

Квантовый алгоритм поиска порядка подстановки. Пусть на множестве Y, состоящем из d элементов, действует подстановка s. Каждая подстановка является произведением ее независимых циклов [13]:

$$s = s_1 s_2 \ldots s_k, \quad \text{где} \quad s_i = (y, s_i(y), \ldots, s_i^{l_i-1}(y)), \quad (1)$$

l_i – длина цикла i: $s_i^{l_i}(y) = y$, y – элемент множества Y, принадлежащий подмножеству, на котором действует подстановка s_i. Порядок r подстановки s ($s^r = e$ – единичная подстановка) равен наименьшему общему кратному длин циклов $l_1, l_2, \ldots, l_k$, входящих в разложение s (1).

Для выполнения рассматриваемого квантового алгоритма [11] следует записать результаты многократного применения подстановки на состояниях двух регистров – двух кудитов в нашем случае. Для каждого цикла s_i это можно сделать, как мы покажем далее, с помощью вентиля SUM [6, 7]:

$$SUM_{1i}|x\rangle_1 \otimes |y\rangle_i = |x\rangle_1 \otimes |x + y(\mathrm{mod}\, l_i)\rangle_i, \quad (2)$$

где $|x\rangle_1$ – состояние контролирующего кудита, а $|y\rangle_i$ – рабочего виртуального кудита, сформированного из l_i последовательных уровней исходного кудита (использование соседних уровней позволит избежать запрещенных переходов, хотя это не принципиально для выполнения алгоритма).

Вентиль SUM для двух кудитов с числом уровней d_1 и d_2 может быть реализован по схеме [7]

$$SUM_{12} = (E_1 \otimes QFT_{d2})^{-1} \cdot P_{12} \cdot (E_1 \otimes QFT_{d2}), \quad (3)$$

где P_{12} – оператор контролируемого сдвига фазы с диагональной матрицей размерности $(d_1 d_2 \times d_1 d_2)$ в пространстве состояний двух кудитов, матричные элементы которого определяются следующим образом:

$$\langle xy|P_{12}|xy\rangle = \exp\left(ixy\frac{2\pi}{d_2}\right),$$

$$x = 0 \ldots (d_1 - 1), \quad y = 0 \ldots (d_2 - 1), \tag{4}$$

E – единичная матрица, а QFT_d – оператор квантового преобразования Фурье (КПФ) (см., например, [14, 15]).

Для более детального исследования возьмем кудиты с числом уровней 8 и 4, что будет соответствовать размерам регистров в уже изученной системе 5 кубитов [11] и удобно, поэтому, для сравнения. Квантовый алгоритм отыскания порядка подстановки на двух таких кудитах может быть реализован с помощью схемы, показанной на рис.1, которая работает следующим образом:

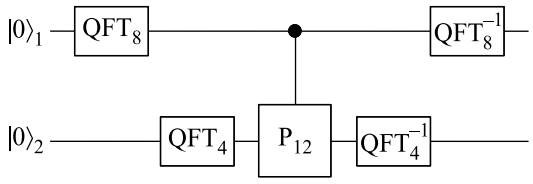

Рис.1. Квантовая схема для алгоритма поиска порядка подстановки на двух кудитах при $d_1 = 8$ и $d_2 = 4$

0) Первый кудит (представление числа x) и второй кудит (представление числа y) устанавливаем в начальном состоянии $|0\rangle_1 \otimes |0\rangle_2$.

1) На кудит 1 действуем КПФ, которое переводит первый регистр в суперпозиционное состояние

$$QFT_8|0\rangle = (|0\rangle + |1\rangle + |2\rangle + |3\rangle + |4\rangle + |5\rangle + |6\rangle + |7\rangle)/\sqrt{8}.$$

2) Оракул действует вентилем SUM (с $r = 4$ или $r = 2$, по своему усмотрению), который переводит сепарабельное состояние двух регистров в перепутанное (или запутанное):

$$SUM_{12} \sum_{x=0}^{7} |x\rangle_1 \otimes |0\rangle_2 = \sum_{x=0}^{7} |x\rangle_1 \otimes |s^x(0)\rangle_2.$$

3) Производим КПФ состояний первого кудита, которое позволяет определить период функции $f(x) = s^x(y)$, записанной в этих состояниях.

4) Измеряем состояния первого кудита и по расстоянию Δx между максимумами (см. ниже рис.3) делаем вывод о порядке подстановки $r = 8/\Delta x$.

Моделирование алгоритма. Для управления кубитами применяют операторы поворота, селективные по спинам [11, 12, 20], тогда как при управлении многоуровневыми системами – селективные по уровням операторы [2 – 10, 14 – 16], для которых будем использовать обозначения $\{\theta\}_\alpha^{m-n}$, где θ – угол, а α – ось поворота, m, n – номера уровней, между которыми осуществляется переход. Последовательности операторов селективных поворотов для КПФ при $d = 4$ и $d = 8$ получены нами в работе [14]. Однако методом линейной алгебры, описанным в [15, 16], нам удалось получить более короткие последовательности, приведенные в табл.1 и табл.2. Их мы будем использовать в настоящей работе.

Таблица 1

Значения параметров в последовательности операторов поворотов $\prod_j \{\theta_j\}_\alpha^{m-n}$ для реализации КПФ на 4-уровневой квантовой системе

j	α	θ_j, рад	$m - n$
1	Y	$-\pi/2$	3 – 4
2	Y	$-2 \cdot \mathrm{arctg}(\sqrt{2})$	2 – 3
3	Y	$2\pi/3$	3 – 4
4	Y	$-2\pi/3$	1 – 2
5	Z	$3\pi/4$	1 – 2
6	Z	$-\pi/2$	2 – 3
7	Z	$\pi/4$	3 – 4
8	Y	$-2\pi/3$	3 – 4
9	Y	$2 \cdot \mathrm{arctg}(\sqrt{2})$	2 – 3
10	Y	$\pi/2$	3 – 4

В качестве физической системы возьмем два квадрупольных ядра со спинами $I_1 = 7/2$ и $I_2 = 3/2$, находящиеся в аксиально-симметричном кристаллическом поле и сильном постоянном магнитном поле, с гамильтонианом [17]

$$H_0 = -\omega_1 I_{1Z} - \omega_2 I_{2Z} + q_1(I_{1Z}^2 - 21/4) + \\ + q_2(I_{2Z}^2 - 5/4) - J I_{1Z} I_{2Z}, \tag{5}$$

где $\omega_i = B_0 \gamma_i$ – ларморовская частота прецессии спина i, J – константа спин-спинового взаимодействия, q_1 и q_2 – константы взаимодействия квадрупольных моментов ядер с градиентом кристаллического поля, I_{1Z} – оператор проекции спина на направление внешнего постоянного поля (ось Z) для соответствующего ядра. Энергию будем измерять в частотных единицах и полагать $\hbar = 1$.

Для управления системой будем прикладывать переменное радиочастотное (РЧ) магнитное поле. РЧ импульс получаем при включении поля с амплитудой B_1 и частотой ω в течение конечного времени $t_p \gg 1/\omega$. Во вращающейся с частотой ω системе координат (ВСК) [17] изменение состояния во времени задается оператором эволюции

$$U(t) = e^{-iHt} \tag{6}$$

с не зависящим от времени эффективным гамильтонианом H:

$$H = H_0 + \omega(I_{1Z} + I_{2Z}) - \Omega_1(I_{1X}\cos\varphi + I_{1Y}\sin\varphi) - \\ - \Omega_2(I_{2X}\cos\varphi + I_{2Y}\sin\varphi). \tag{7}$$

Таблица 2

То же, что в табл.1, но для 8-уровневой квантовой системы

j	α	θ_j, рад	$m-n$
1	Y	$-\pi/2$	7 – 8
2	Y	$-2\cdot\mathrm{arctg}(\sqrt{2})$	6 – 7
3	Y	$-2\pi/3$	5 – 6
4	Y	$-2\cdot\mathrm{arctg}(2)$	4 – 5
5	Y	$-2\cdot\mathrm{arctg}(\sqrt{5})$	3 – 4
6	Y	$-2\cdot\mathrm{arctg}(\sqrt{6})$	2 – 3
7	Z	$-7\pi/4$	2 – 3
8	Z	$-1{,}0409$	7 – 8
9	X	$-1{,}1086$	7 – 8
10	Z	$-1{,}5508$	6 – 7
11	X	$-1{,}4928$	6 – 7
12	Z	$-1{,}7886$	5 – 6
13	X	$-1{,}7680$	5 – 6
14	Z	$-1{,}8803$	4 – 5
15	X	$-1{,}9954$	4 – 5
16	Z	$0{,}0451$	4 – 5
17	Z	$-0{,}2086$	7 – 8
18	X	$-0{,}9564$	7 – 8
19	Z	$-0{,}4371$	6 – 7
20	X	$-1{,}3518$	6 – 7
21	Z	$0{,}6691$	6 – 7
22	Z	$6{,}9736$	7 – 8
23	X	$-0{,}9160$	7 – 8
24	Z	$0{,}3558$	7 – 8
25	Z	$6{,}0410$	5 – 6
26	X	$-1{,}6806$	5 – 6
27	Z	$-0{,}5993$	5 – 6
28	X	$-1{,}3518$	6 – 7
29	Z	$-0{,}4371$	6 – 7
30	X	$-0{,}9564$	7 – 8
31	Z	$-0{,}2086$	7 – 8
32	Z	$-4{,}6096$	3 – 4
33	X	$-2{,}1944$	3 – 4
34	Z	$-1{,}8833$	3 – 4
35	X	$-1{,}9954$	4 – 5
36	Z	$-1{,}8803$	4 – 5
37	X	$-1{,}7680$	5 – 6
38	Z	$-1{,}7886$	5 – 6
39	X	$-1{,}4928$	6 – 7
40	Z	$-1{,}5508$	6 – 7
41	X	$-1{,}1086$	7 – 8
42	Z	$-1{,}0409$	7 – 8
43	Z	$\pi/8$	1 – 2
44	Y	$2\cdot\mathrm{arctg}(\sqrt{7})$	1 – 2
45	Y	$2\cdot\mathrm{arctg}(\sqrt{6})$	2 – 3
46	Y	$2\cdot\mathrm{arctg}(\sqrt{5})$	3 – 4
47	Y	$2\cdot\mathrm{arctg}(2)$	4 – 5
48	Y	$2\pi/3$	5 – 6
49	Y	$2\cdot\mathrm{arctg}(\sqrt{2})$	6 – 7
50	Y	$\pi/2$	7 – 8

Здесь $\Omega_i = B_1\gamma_i$. Фаза РЧ поля φ определяет направление поля в ВСК. При этом, если выбрать частоту переменного поля равной частоте переходов между уровнями энергии $\omega = \varepsilon_n - \varepsilon_m$, то в первую очередь будут изменяться состояния, соответствующие данным уровням, и мы получим селективный поворот $\{\theta\}_\alpha^{m-n}$ на угол $\theta = t_p\Omega I_{mn}$, где I_{mn} – модуль матричного элемента оператора I_X. Селективный поворот вокруг оси Z в наших расчетах будем осуществлять, следуя работе [11], с помощью сдвига фазы последующего РЧ импульса.

Подстановка с порядком $r = 4$ имеет один цикл $s = (0,1,2,3)$ и задается одним вентилем SUM (3), в котором диагональный оператор P_{12} (4) можно выразить через операторы I_{1Z} и I_{2Z} на основании соотношения

$$\frac{\pi}{2}xy = \frac{\pi}{2}\left(\frac{7}{2} - I_{1Z}\right)\left(\frac{3}{2} - I_{2Z}\right) =$$

$$= \frac{\pi}{2}\left(I_{1Z}I_{2Z} - \frac{3}{2}I_{1Z} - \frac{7}{2}I_{2Z} + \frac{21}{4}\right). \qquad (8)$$

После подстановки (8) P_{12} преобразуется в произведение трех операторов и общего фазового множителя:

$$P_{12} = \exp\left(i\frac{\pi}{2}I_{1Z}I_{2Z}\right)\cdot\exp\left(-i\frac{7\pi}{4}I_{2Z}\right)\times$$

$$\times\exp\left(-i\frac{3\pi}{4}I_{1Z}\right)\cdot\exp\left(-i\frac{21\pi}{8}\right). \qquad (9)$$

Первый из них получаем путем свободной эволюции системы с гамильтонианом спин-спинового взаимодействия $H_J = -JI_{1Z}I_{2Z}$ в течение времени

$$t_J = \pi/2J. \qquad (10)$$

Для устранения сдвига фазы вследствие квадрупольного и зеемановского взаимодействий время задаем кратным периоду $2\pi/q_1$ [9]. Второй и третий операторы в (9) сводятся к действию дополнительных Z-импульсов на соответствующие спины:

а) импульсы, действующие на спин 1,

$$\left\{\frac{5}{4}\pi\right\}_Z^{7-8}\cdot\{\pi\}_Z^{6-7}\cdot\left\{\frac{3}{4}\pi\right\}_{-Z}^{5-6}\cdot$$

$$\cdot\left\{\frac{3}{4}\pi\right\}_{-Z}^{3-4}\cdot\{\pi\}_Z^{2-3}\cdot\left\{\frac{5}{4}\pi\right\}_Z^{1-2}; \qquad (11)$$

б) импульсы, действующие на спин 2,

$$\left\{\frac{5}{4}\pi\right\}_Z^{3-2}\cdot\{\pi\}_{-Z}^{2-3}\cdot\left\{\frac{5}{4}\pi\right\}_Z^{1-2}. \qquad (12)$$

В качестве подстановки с порядком $r = 2$ с двумя циклами возьмем подстановку $s = (0,2)(1,3)$, поскольку ее можно задать снова одним вентилем SUM (3), в операторе P_{12}, у которого показатель следует умножить на 2. Это означает, что длительность

интервала эволюции (10) и углы Z-поворотов в (11), (12) удваиваются.

Результаты расчетов показаны на рис.2 и рис.3. Для сравнения на рис.4 показаны результаты расчета для случая реализации алгоритма на 5 кубитах, выполненные нами по схеме работы [11] с РЧ импульсами (6). С целью приблизить условия двух способов реализации мы выбрали значения констант, отличные от экспериментальных. Различия в расположении максимумов на рис.3 и 4 обусловлены различием операторов КПФ. На кубитах реализовано быстрое преобразование Фурье, приводящее к побитно обратному результату, тогда как на кудитах – полное КПФ.

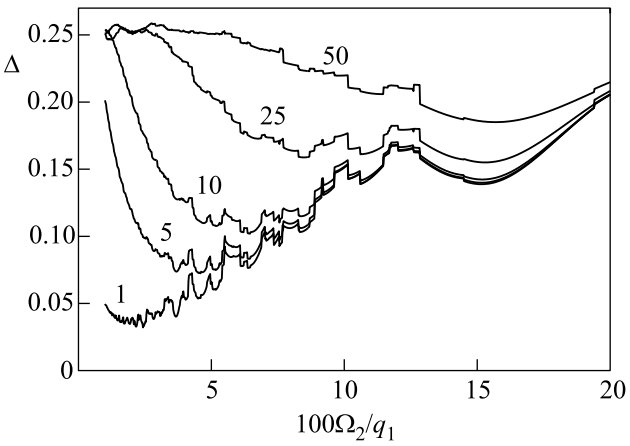

Рис.2. Зависимость от амплитуды РЧ поля ошибки реализации алгоритма поиска порядка подстановки (рис.1) $\Delta = \frac{1}{32}\sqrt{\sum_{i,j}|U_{ij} - U_{ij}^{\text{teor}}|^2}$, где U_{ij}^{teor} – элементы матрицы 32×32 идеального оператора алгоритма в целом, а U_{ij} – элементы численно рассчитанной матрицы оператора алгоритма, полученного с помощью произведения операторов эволюции (6). Цифрами на кривых показана величина спин-спинового взаимодействия в единицах $10^5 \cdot J/q_1$. Значения других параметров: $\omega_1 = 3000$; $\omega_2 = 6000$; $q_1 = 100$; $q_2 = 200$. Кривые для $r = 2$ и $r = 4$ совпадают

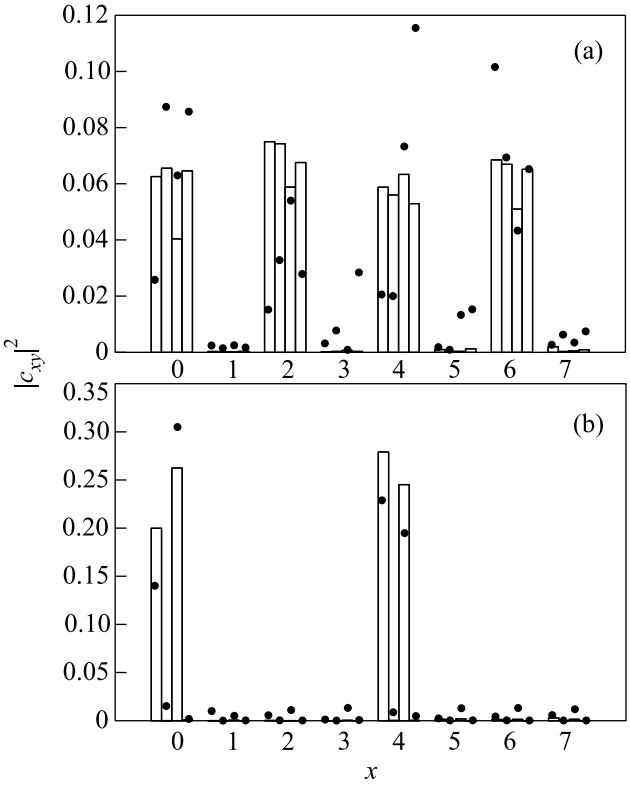

Рис.3. Вероятности $|c_{xy}|^2$ состояний $|x\rangle_1 \otimes |y\rangle_2$ в конце алгоритма поиска порядка подстановки на двух кудитах (рис.1) при $r = 4$ (a) и $r = 2$ (b). Столбиками показаны значения при $J/q_1 = 10^{-5}$ и $100\Omega_2/q_1 = 2.18$, кружками – при $J/q_1 = 10^{-4}$ и $100\Omega_2/q_1 = 6.35$. Значения других параметров: $\omega_1 = 3000$; $\omega_2 = 6000$; $q_1 = 100$; $q_2 = 200$. Цифрами внизу обозначены номера состояний первого кудита ($x = 0, 1, \ldots, 7$), состояния второго кудита ($y = 0, 1, 2, 3$) не обозначены и располагаются по порядку слева направо

Ошибка обусловлена двумя основными причинами:

1) РЧ импульс, помимо селективного поворота на выбранном переходе действует на остальные нерезонансные переходы. Эта ошибка растет при увеличении амплитуды РЧ импульса.

2) Спин-спиновое взаимодействие изменяет состояние системы во время действия РЧ импульсов. Эта ошибка растет при уменьшении амплитуды РЧ импульса.

В результате совместного действия наблюдается минимум на кривых рис.2, значение ошибки в котором растет с ростом J. При этом наибольший вклад в ошибку происходит от изменения фазы состояний.

Квазичистое состояние. При выполнении квантовых вычислений методами ЯМР необходимо приготовить квазичистое состояние из теплового равновесного состояния. Как это сделать для одного квадрупольного ядра, можно найти, например, в работах [8,18]. В частности, в работе [18] для 8 уровней ядра ^{133}Cs с $I = 7/2$ применен многочастотный (модулированный) селективный РЧ импульс, оставляющий неизменной населенность основного уровня и выравнивающий населенности всех остальных уровней.

Для двух квадрупольных ядер готовая процедура создания квазичистого состояния нам не известна. Мы предлагаем применить метод фильтрации с помощью временного фазового циклирования [19]. С

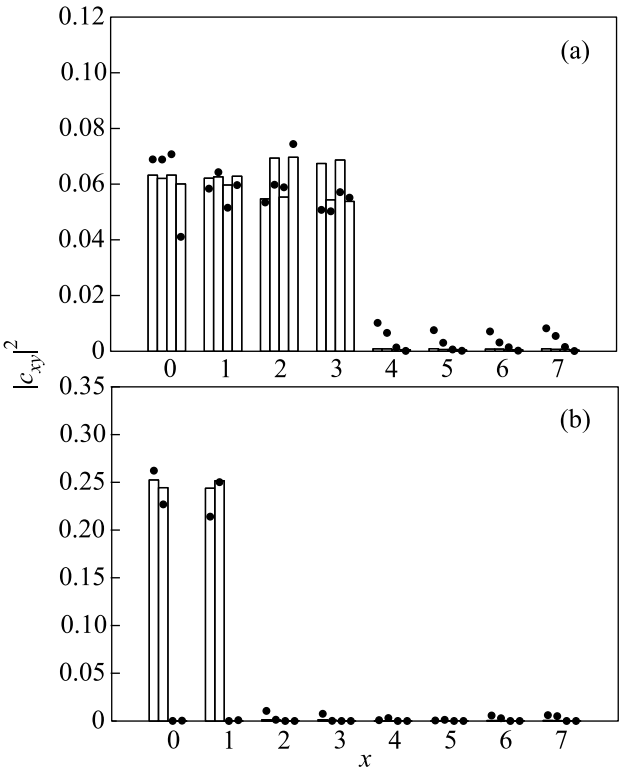

Рис.4. Вероятности $|c_{xy}|^2$ состояний $|x_1\rangle \otimes |y_2\rangle$ в конце алгоритма поиска порядка подстановки на пяти кубитах [11] при $r = 4$ (a) и $r = 2$, $s = (0,1)(2,3)$ (b). Столбиками показаны значения при $J/\Delta\omega = 10^{-5}$, кружками – при $J/\Delta\omega = 10^{-4}$, где $\Delta\omega = 10000$. Значения других параметров: $\omega_j = j\Delta\omega$ (j =1, 2, 3, 4, 5), $\Omega_1/\Delta\omega = \Omega_2/\Delta\omega = \Omega_3/\Delta\omega = \Omega_4/\Delta\omega = \Omega_5/\Delta\omega = 0.0125$. Цифрами внизу обозначены номера состояний первого регистра ($x = 0, 1, \ldots, 7$), состояния второго регистра ($y = 0, 1, 2, 3$) не обозначены

этой целью перед вышеупомянутым многочастотным селективным импульсом подействуем на спин 1 двумя мощными неселективными РЧ импульсами, разделенными интервалом свободной эволюции:

$$\left\{\frac{1}{2}\pi\right\}_Y \to t_k \to \left\{\frac{1}{2}\pi\right\}_{\varphi_k - Y}. \qquad (13)$$

Поперечная компонента спина 1 за время t_k приобретет фазу, зависящую от ориентации второго спина:

$$JI_{2Z}t_k + \varphi_k = Jt_k(I_{2Z} - I_2),$$

где фазовый сдвиг второго импульса выбран таким, чтобы скомпенсировать временную зависимость основного состояния $I_{2Z} = I_2$. Выполним эксперимент последовательно $2I_2 + 1$ раз с разными интервалами между импульсами:

$$t_k = 2\pi k/J(2I_2 + 1) \quad (k = 0, 1, \ldots, 2I_2) \qquad (14)$$

(время задаем кратным периоду $2\pi/q_1$) и сложим результаты экспериментов. После чего останется только интересующий нас результат, соответствующий основному состоянию, тогда как вклады остальных состояний исчезнут.

В частности, для $I_2 = 3/2$ эксперимент необходимо выполнить четыре раза. Отметим, что для приготовления квазичистого состояния методом временного усреднения в упомянутой работе [11] на 5 кубитах складывали результаты 9 экспериментов.

При демонстрации работы квантовых алгоритмов методами ЯМР сигнал наблюдается от большого ансамбля квантовых систем, поэтому квантовые вероятности выхода наблюдаются через интенсивности линий в спектре ЯМР при спектральной регистрации или через величины элементов матрицы плотности при томографической регистрации:

$$\rho_f = \left\{\frac{(1-\beta)}{d_1 d_2} E_1 \otimes E_2 + \beta|\Psi_f\rangle\langle\Psi_f|\right\}, \qquad (15)$$

где β – амплитуда квазичистого состояния, пропорциональная обратной температуре, а

$$|\Psi_f\rangle = \sum_{y=0}^{3}\sum_{x=0}^{7} c_{xy}|x\rangle_1 \otimes |y\rangle_2 = U|0\rangle_1 \otimes |0\rangle_2. \qquad (16)$$

Заключение. Итак, получены формулы, позволяющие реализовать квантовый алгоритм поиска порядка подстановки на двух квадрупольных ядрах $I_1 = 7/2$ и $I_2 = 3/2$, вместо пяти спинов $I = 1/2$ [11]. Для реализации требуется 70 РЧ импульсов в первом и 80 для $r = 2$ (100 для $r = 4$) во втором случаях. Проведенное моделирование показало близкую точность двух способов при сопоставимых значениях параметров. Для уменьшения ошибки от рассмотренного случая простых импульсных последовательностей следует перейти к более сложным. Необходимые специальные приемы уже разработаны для кубитов [11, 12, 20], тогда как для квадрупольных ядер это еще предстоит сделать.

В качестве примера мы выбрали два квадрупольных ядра, управляемые РЧ полем, поскольку ЯМР лидирует в моделировании квантовых алгоритмов [20]. Однако, после соответствующих изменений, формулы могут быть распространены на другие многоуровневые системы: молекулярные магнетики, примеси в кристаллах, атомы и ионы в ловушках и т.п. Многоуровневые базовые элементы (кукварты [21]) были получены и в оптике, но экспериментальная демонстрация алгоритма Шора, например, выполнена на кубитах [22, 23]. Главное отличие таких линейных оптических схем от нашей в том, что в

них перепутанность состояний фотонов получается без непосредственного взаимодействия между ними.

Один из авторов (А.С.Е.) благодарит Красноярский краевой фонд науки за финансовую поддержку (грант # 17G092).

1. D. Gottesman, Lect. Not. Comp. Sci. **1509**, 302 (1999).
2. А. Р. Кессель, В. Л. Ермаков, Письма в ЖЭТФ **70**, 59 (1999); **71**, 443 (2000).
3. A. Muthukrishnan and C. R. Stroud (Jr.), Phys. Rev. A **62**, 052309 (2000).
4. J. L. Cereceda, quant-ph/0407253.
5. A. Yu. Vlasov, J. Math. Phys. **43**, 2959 (2002).
6. S. D. Bartlett, H. de Guise, and B. C. Sanders, Phys. Rev. A **65**, 052316 (2002).
7. J. Daboul, X. Wang, and B. C. Sanders, J. Phys. A **36**, 7063 (2003).
8. V. L. Ermakov and B. M. Fung, Phys. Rev. A **66**, 042310 (2002).
9. R. Das and A. Kumar, Phys. Rev. A **68**, 032304 (2003).
10. K. V. R. M. Murali, N. Sinha, T. S. Mahesh et al., Phys. Rev. A **66**, 022313 (2002).
11. L. M. K. Vandersypen, M. Steffen, G. Breyta et al., Phys. Rev. Lett. **85**, 5452 (2000).
12. L. M. K. Vandersypen, M. Steffen, G. Breyta et al., Nature **414**, 883 (2001).
13. В. Н. Сачков, *Введение в комбинаторные методы дискретной математики*, М.: Наука, 1982.
14. В. Е. Зобов, А. С. Ермилов, Письма в ЖЭТФ **83**, 539 (2006).
15. А. С. Ермилов, В. Е. Зобов, Оптика и спектроскопия **103**, 994 (2007).
16. G. K. Brennen, D. P. O'Leary, and S. S. Bullock, Phys. Rev. A **71**, 052318 (2005).
17. Ч. Сликтер, *Основы теории магнитного резонанса*, М.: Мир, 1981.
18. A. K. Khitrin and B. M. Fung, Phys. Rev. A **64**, 032306 (2001).
19. J.-S. Lee and A. K. Khitrin, J. Chem. Phys. **4**, 041101 (2005).
20. L. M. K. Vandersypen and I. L. Chuang, Rev. Mod. Phys. **76**, 1037 (2004).
21. E. V. Moreva, G. A. Maslennikov, S. S. Straup, and S. P. Kulik, Phys. Rev. Lett. **97**, 023602 (2006).
22. C.-Y. Lu, D. E. Browne, T. Yang, and J.-W. Pan, Phys. Rev. Lett. **99**, 250504 (2007).
23. B. P. Lanyon, T. J. Weinhold, N. K. Langford et al., Phys. Rev. Lett. **99**, 250505 (2007).