

# О механизме объемного отражения релятивистских частиц

Г. В. Ковалев<sup>1)</sup>

North Saint Paul, MN 55109, USA

Поступила в редакцию 15 февраля 2008 г.

Рассматриваются механизмы объемного отражения положительно и отрицательно заряженных релятивистских частиц в изогнутом кристалле. Показано, что для отрицательных частиц существенную роль играет эффект пустой сердцевинки. Найден средний угол отражения отрицательно заряженных частиц и обсуждаются условия наблюдения отражения и преломления.

PACS: 13.88.+e, 41.60.-m, 61.85.+p

Эксперименты [1–3] подтвердили эффект объемного отражения протонов 1, 70 и 400 ГэВ в изогнутом кристалле Si, обнаруженный Таратиным и Воробьевым [4, 5] методом Монте-Карло, и продемонстрировали возможность его применения для коллимации пучков ускорителей [6]. Численные расчеты [4, 5, 7] также указали на существование объемного отражения отрицательно заряженных частиц, но с меньшим, чем для положительных частиц, углом отражения. Однако отражение отрицательных заряженных частиц отличается по своей природе от отражения положительных частиц и требует более детального анализа. Действительно, в рамках классической механики при движении в поле одномерной потенциальной ямы (см. рис.1a) отражение и рассеяние отрицательных частиц отсутствуют, в то время как для положительных частиц, рис.1b, при скользящем падении на одномерный барьер,  $\alpha < \theta_L$  ( $\alpha$  – угол между импульсом частицы и границей одномерного барьера,  $\theta_L$  – критический угол Линдхарда), имеет место полное отражение. В случае центрально-симметричного потенциала это явление ответственно за объемное отражение релятивистских положительных частиц в изогнутом кристалле. В самом деле, если отсчитывать прицельный параметр  $b$  от тангенциального края (точка  $T$  на рис.1c) центрально-симметричного кольцевого барьера высоты  $U_o$ , то  $b = R(1 - \cos(\alpha))$  и средний угол отражения будет определяться интегралом

$$\bar{\chi} = \frac{1}{b_{\max}} \int_0^{b_{\max}} 2\alpha db, \quad (1)$$

где максимальный прицельный параметр,  $b_{\max} = R(1 - \cos(\theta_L))$ , зависит от критического угла канализования  $\theta_L = \sqrt{2U_o E/p_\infty^2 c^2}$  и радиуса потенциального барьера  $R$ . Для малых углов  $\alpha, \theta_L \ll 1$  имеем

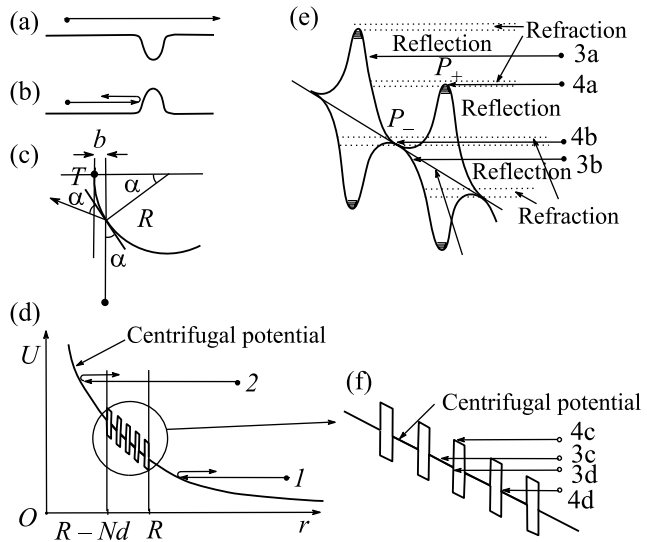


Рис.1. Одномерное движение отрицательных (a) и положительных (b) частиц; (c) – отражение положительной частицы от центрально-симметричного барьера; (d) – эффективный потенциал системы прямоугольных кольцевых потенциалов; (e) – области отражения и преломления; (f) – линейное приближение для эффективного потенциала

$b_{\max} = R\theta_L^2/2$ ,  $db = R\alpha d\alpha$  и из (1) получаем средний угол отражения

$$\bar{\chi} = 4\theta_L/3, \quad (2)$$

совпадающий с полученной оценкой для изогнутого кристалла ([8], формула (18)).

В противоположность этому, хорошо известно, что при рассеянии на центрально-симметричной потенциальной яме глубиной  $-U_o$  отражение отсутствует. Здесь для всех прицельных параметров имеет место только преломление (см. §19, задача 2 в [9]). Таким образом, отражение отрицательно заряженных частиц в численном моделировании представляется на первый взгляд неожиданным явлением

<sup>1)</sup>e-mail: kovalevgennady@qwest.net

ем. Тем не менее, в [8] было показано, что если рассеяние происходит на кольцевом потенциале, отражение отрицательно заряженных частиц присутствует. Так как кольцевой потенциал отличается от ямы внутренней потенциальной стенкой, естественно думать, что это есть результат отражения от внутренней стенки кольцевого потенциала, подобный отражению от внешней стенки потенциального барьера. Однако, как показано ниже, определяющим фактором отражения отрицательных частиц в кристалле надо считать эффект специфического отклонения, который был назван эффектом “пустой сердцевин” (empty core effect) [8].

При рассмотрении рассеяния в центральном поле (и в однородно изогнутом кристалле) вводится эффективный потенциал

$$U_{\text{eff}}(r) = U(r) + \frac{p_{\infty}^2 c^2 b^2}{2Er^2} \quad (3)$$

(здесь  $b$  – прицельный параметр, отсчитываемый от центра, все остальные обозначения здесь и далее такие же как в [8]), в котором любое инфинитное движение формально выглядит как “отражение” – частица приходит из бесконечности, останавливается в точке поворота и уходит на бесконечность.

Подчеркнем, что такая трактовка отражения [3] не всегда верна. Первый пример, тривиальный: частица 1 на рис.1d “отражается” на расстоянии  $b > R$  от центра эффективного потенциала, который включает только центробежный член, так как  $U(r) = 0$  в этой области. В декартовых координатах это – прямолинейное движение. Второй пример: частица 2 на рис.1d “отражается” на расстоянии  $b < R - Nd$  от центра кольцевого потенциала, где тоже  $U(r) = 0$ . Это эффект “пустой сердцевин”. Как показано в [8], здесь возможны две противоположные ситуации: а) если имеется произвольный отрицательный несингулярный потенциал, локализованный в кольце, то частица с любой траекторией, подобной траектории 2 на рис.1d отражается (имеет угол  $\chi > 0$ ); б) если имеется положительный несингулярный кольцевой потенциал, то частица с траекторией типа 2 на рис.1d преломляется (имеет угол  $\chi < 0$ ). В обоих случаях точка поворота одна и та же и лежит на центробежной кривой.

Наконец, рассмотрим примеры, когда точка поворота находится в зоне действия потенциала кристалла  $U(r)$ . Они имеют непосредственное отношение к экспериментам по отражению релятивистских частиц. Эффективный потенциал системы периодических колец, использованный в [8], показан на рис.1d,f. Реальный потенциал кристалла – гладкая функция

и, если выполняется критерий Цыганова [10],  $R > > p_{\infty}^2 c^2 / EU(r)'$ , эффективный потенциал имеет систему гладких максимумов и минимумов, соответствующих каждой изогнутой потенциальной плоскости, рис.1e.

В 50-х годах Форд и Веелер [11, 12] показали, что если эффективный потенциал для некоторого прицельного параметра имеет гладкий локальный максимум, то функция отклонения [13]

$$\chi(b) = \pi - 2\sqrt{\frac{p_{\infty}^2 c^2 b^2}{2E}} \int_{r_0}^{\infty} \frac{\frac{1}{r^2} dr}{\sqrt{\frac{p_{\infty}^2 c^2}{2E} - U(r) - \frac{p_{\infty}^2 c^2 b^2}{2Er^2}}} \quad (4)$$

имеет отрицательную логарифмическую сингулярность, то есть частица, попавшая на максимум потенциала, будет совершать неопределенное количество витков вокруг центра. Это явление спирального или орбитального рассеяния (spiral or orbiting scattering) было хорошо известно в атомных столкновениях при низких энергиях (см. [14, 13]). Нам представляется, что при определенных условиях этот механизм работает и для релятивистских частиц. Если траектории частиц касаются эффективного потенциала в точках локального максимума (траектории 4a и 4b на рис.1e), то в этих точках должна обращаться в нуль не только радиальная скорость частицы  $v_r$ , но и действующая на нее радиальная сила  $-\partial U_{\text{eff}}/\partial r$  (а стало быть и радиальное ускорение  $\dot{v}_r$ ). То есть движение частицы в радиальном направлении прекращается, в то же время частица продолжает двигаться в тангенциальном направлении (на самом деле, окружность с радиусом  $r_0$  является предельным циклом, к которой по спирали должна приближаться частица). Это классический механизм спирального рассеяния. Если бы потери отсутствовали, то частица могла совершать бесконечное количество оборотов вокруг центра. Разумеется, это неустойчивое положение и незначительные флуктуации выводят частицу из этого состояния. Квантово-механический аналог этого явления – резонансное рассеяние [15]. Строго говоря, только одна траектория удовлетворяет условию спирального рассеяния, для близких к ней траекторий в классической механике этот эффект проявляется как преломление – частица, проходя небольшую часть углового пути в сторону изгиба потенциала, отклоняется и уходит по симметричной асимптоте от центра. Зоны отражения и преломления условно показаны на рис.1e штриховыми линиями.

Однако в экспериментах по отражению положительно заряженных частиц [1–3] вместо спирального рассеяния наблюдается объемный захват частиц в режим каналирования. На наш взгляд, это про-

исходит по двум важным причинам: а) плотность ядер кристалла и электронная плотность (на рис.1е затемненные области) высоки в максимумах для положительно заряженных частиц; б) спиральное рассеяние и преломление положительно заряженных частиц обеспечивает довольно длительное нахождение частиц около максимумов эффективного потенциала и, стало быть, существенно увеличивает интенсивность объемного захвата. Для отрицательных частиц максимум потенциала является более широкой перевернутой параболой, поэтому зона преломления для отрицательных частиц должна быть шире. Кроме того, плотность ядер кристалла и электронная плотность практически отсутствуют в максимумах для отрицательных частиц. Следовательно, устойчивость траекторий преломления для отрицательных частиц должна быть значительно выше. В результате, фракция отрицательно заряженных частиц в узком диапазоне прицельных параметров может двигаться в сторону изгиба кристалла без участия механизма объемного захвата в режим каналирования, а только благодаря эффекту преломления вблизи локальных максимумов потенциала и родственному явлению – спиральному рассеянию. При этом пик, характерный для объемного захвата положительных частиц, не должен присутствовать для захвата отрицательных частиц. Таким образом, эффект преломления и спирального рассеяния может быть замечен при детальном сопоставлении рассеяния положительных и отрицательных релятивистских частиц в области, которая традиционно считалась областью объемного захвата.

В работе [8] рассматривалось точное решение задачи рассеяния на потенциале периодической системы прямоугольных колец и даны оценки среднего угла отражения положительно заряженных релятивистских частиц, описывающего эксперименты [1–3]. В использованной модели прямоугольных колец потенциал не является гладкой функцией и в точках касания (см., например, 4с, 4d на рис.1f) радиальная сила в максимуме не обращается в нуль, поэтому спиральное рассеяние отсутствует в этой модели. Однако она пригодна для описания отражения (см. 3с, 3d на рис.1f), в частности, отражения отрицательно заряженных релятивистских частиц, детали которой мы приведем ниже.

Прежде всего укажем на то, что большинство траекторий отрицательно заряженных частиц имеют точки поворота, лежащие на кривой центробежного потенциала между потенциальными ямами, 3с на рис.1f, и меньшая часть попадает в зоны потенциальных ям, 3d на рис.1f. Так как кристаллический

потенциал, лежащий выше траектории (линии 3с), не влияет на поведение частицы, то легко видеть, что рассеяние частицы с траекторией, подобной 3с, имеет точно такую же природу, как рассеяние частицы с траекторией 2 на рис.1d, то есть угол поворота будет в этом случае определяться эффектом пустой сердцевинки. Поскольку потенциал, лежащий под траекторией частицы, отрицателен, то для траекторий типа 3с имеет место отражение. Это качественно объясняет рис.2с, d в [8] и рис.2а в этой статье, где в области, лежащей левее точки  $1-\hat{a}$ , углы положительны. Формула (15) в [8] содержит опечатку, правильное выражение для рассеяния отрицательных частиц на одном кольце, использованное для построения рис.2с, d работы [8], следующее:

$$\alpha(\hat{b})_- = \quad (5)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (\sqrt{1-\hat{b}^2} - \sqrt{\Phi-\hat{b}^2}) - (\sqrt{1-\hat{b}_a^2} - \sqrt{\Phi-\hat{b}_a^2}), \\ \text{for } 0 < \hat{b} < (1-\hat{a}); \\ \sqrt{1-\hat{b}^2} - \sqrt{\Phi-\hat{b}^2} + \sqrt{\Phi-\hat{b}_a^2}, \\ \text{for } (1-\hat{a}) < \hat{b} < (1-\hat{a})\sqrt{\Phi}; \\ \sqrt{1-\hat{b}^2} - \sqrt{\Phi-\hat{b}^2}, \text{ for } (1-\hat{a})\sqrt{\Phi} < \hat{b} < 1; \\ 0, \text{ for } 1 < \hat{b}. \end{array} \right.$$

Часть формул (16) в [8], касающихся максимального и минимального углов отклонения отрицательных частиц, должна выглядеть так:

$$\begin{aligned} \alpha_{\max-} &= \sqrt{2\hat{a}} - \sqrt{2\hat{a} - \phi_o} - \sqrt{-\phi_o} \\ \alpha_{\min-} &= -\sqrt{-\phi_o}. \end{aligned} \quad (6)$$

Они получаются из (5) подстановками  $\hat{b} = (1-\hat{a})$ ,  $\hat{b} = 1$  и условиями малости  $\hat{a} \ll 1$ ,  $\hat{a}^2 \ll \hat{a}$ . Когда глубина ямы достаточно велика,  $|\phi_o| > 2\hat{a}$ , эти формулы модифицируются:

$$\begin{aligned} \alpha_{\max-} &= \sqrt{2\hat{a}} - \frac{\hat{a}}{\sqrt{|\phi_o|}}, \\ \alpha_{\min-} &= -\frac{\hat{a}}{\sqrt{|\phi_o|}}, \end{aligned} \quad (7)$$

при этом надо иметь в виду, что диапазон  $(1-\hat{a})\sqrt{\Phi} < \hat{b} < 1$  сужается до нуля. Это видно на рис.2d и рис.3d в [8] (ср. с рис.2с и рис.3с [8]), где нижняя часть функции отклонения, соответствующая дну потенциальной ямы, исчезает.

Приведем общее выражение для функции отклонения отрицательно заряженных частиц в системе пря-

моугольных колец [8], когда прицельный параметр  $\hat{b}$  попадает в кольцо  $(1 - (k + 1)\hat{a}) < \hat{b} < (1 - k\hat{a})$ :

$$\chi(\hat{b})_- = 2 \sum_{i=0}^{k-1} \alpha_i(\hat{b}) + \quad (8)$$

$$+ 2 \begin{cases} (\sqrt{1 - \hat{b}_k^2} - \sqrt{\Phi - \hat{b}_k^2}) - (\sqrt{1 - \hat{b}_{ka}^2} - \sqrt{\Phi - \hat{b}_{ka}^2}), \\ \text{for } (1 - (k + 1)\hat{a}) < \hat{b} < (1 - \hat{a} - k\hat{a}); \\ \sqrt{1 - \hat{b}_k^2} - \sqrt{\Phi - \hat{b}_k^2} + \sqrt{\Phi - \hat{b}_{ka}^2}, \\ \text{for } (1 - \hat{a} - k\hat{a}) < \hat{b} < (1 - \hat{a} - k\hat{a})\sqrt{\Phi}; \\ \sqrt{1 - \hat{b}_k^2} - \sqrt{\Phi - \hat{b}_k^2}, \\ \text{for } (1 - \hat{a} - k\hat{a})\sqrt{\Phi} < \hat{b} < (1 - k\hat{a}). \end{cases}$$

Изменение функции отклонения при увеличении глубины потенциала  $U_o$  для разных значений параметра  $2U_o E/p_\infty^2 c^2 \hat{a}$ , рассчитанное с помощью (8), показано на рис.2а.

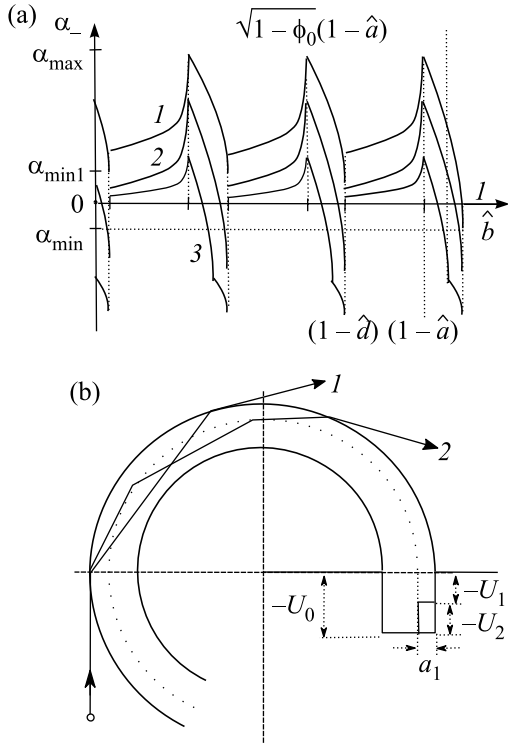


Рис.2. (а): Функции отклонения отрицательных частиц для различных значений  $\phi_o/\hat{a}$ : 1 -  $\phi_o/\hat{a} = 12$ , 2 -  $\phi_o/\hat{a} = 4$ , 3 -  $\phi_o/\hat{a} = 1.2$ ; (б): Касательная траектория рассеяния 1 на прямоугольном потенциале; касательная траектория рассеяния 2 на ступенчатом потенциале с той же максимальной глубиной, что и прямоугольный потенциал,  $U_o = U_1 + U_2$

Для отрицательных частиц средний угол отражения можно рассчитать, исходя из первого от края пе-

риода потенциала. Не учитывая отражения от внутренней стенки потенциала, он будет определяться интегралом:

$$\bar{\alpha}_- = \frac{1}{\hat{d} - \hat{a}} \int_{1-\hat{a}}^{1-\hat{a}} \left( (\sqrt{1 - \hat{b}^2} - \sqrt{\Phi - \hat{b}^2}) - (\sqrt{1 - \hat{b}_a^2} - \sqrt{\Phi - \hat{b}_a^2}) \right) d\hat{b} \quad (9)$$

с последующим разложением по малым величинам  $\hat{a}, \hat{d}, \phi_o$ . В результате получаем выражение для среднего угла отражения  $\chi_- = 2 \cdot \bar{\alpha}_-$  отрицательных частиц:

$$\bar{\chi}_- = \frac{2}{3(\hat{d} - \hat{a})} \left( (2\hat{d} - 2\hat{a} - \phi_o)^{3/2} + (2\hat{d})^{3/2} + (2\hat{a} - \phi_o)^{3/2} - (-\phi_o)^{3/2} - (2\hat{d} - \phi_o)^{3/2} - (2\hat{a})^{3/2} - (2\hat{d} - 2\hat{a})^{3/2} \right). \quad (10)$$

Для возможных экспериментов по рассеянию антипротонов с энергиями 1, 70, 400 ГэВ и с той же геометрией кристаллов, как в [1-3], формула (10) дает средние углы отражения: 14.8, 4.3, 1.8 мкрад, соответственно.

В заключение укажем на возможность усовершенствования модели прямоугольных колец, которая могла бы учитывать спиральное рассеяние. Если прямоугольную яму заменить системой прямоугольных ступеней, близкой к реальной потенциальной кривой, то угол преломления касательной траектории будет больше по сравнению с прямоугольной моделью. Это видно из следующего примера. Для касательной траектории отрицательной частицы угол преломления (минимальный угол в (6)) на прямоугольном потенциале глубиной  $-U_o$  есть  $\alpha_{\min} = -\sqrt{-\phi_o}$ , где  $\phi_o = -2U_o E/p_\infty^2 c^2$ . Возьмем ступенчатый потенциал, как показано на рис.2б с произвольными  $U_1$  и  $U_2$ , но такими, что  $U_o = U_1 + U_2$ . Для той же касательной траектории угол преломления на ступени глубиной  $-U_1$  теперь будет  $-\sqrt{-\phi_1}$ , где  $\phi_1 = -2U_1 E/p_\infty^2 c^2$ . Выберем ширину ступени  $a_1$  таким образом, чтобы траектория коснулась границы ступени или пересекла границу (это всегда можно сделать). Тогда возникнет вторичное преломление с углом  $-\sqrt{-\phi_2}$ , где  $\phi_2 = -2U_2 E/p_\infty^2 c^2$ . Суммарный угол преломления будет  $-(\sqrt{-\phi_1} + \sqrt{-\phi_2})$ , при этом, конечно,  $\phi_o = \phi_1 + \phi_2$ . Так как всегда выполняется неравенство  $\sqrt{A} + \sqrt{B} > \sqrt{A+B}$ , суммарный угол рассеяния на ступенчатом потенциале  $\sqrt{-\phi_1} + \sqrt{-\phi_2}$  будет больше, чем на прямоугольном  $\sqrt{-\phi_1 - \phi_2} = \sqrt{-\phi_o}$ , хотя максимальная глубина этих потенциалов одинакова. Производя последующие разбиения потенциала на более мелкие ступе-

ни, можно неограниченно увеличивать угол преломления, реализовав, таким образом, спиральное рассеяние на ступенчатом потенциале конечной глубины.

- 
1. Yu. M. Ivanov, A. A. Petrunin, V. V. Skorobogatov et al., *Phys. Rev. Lett.* **97**, 144801 (2006).
  2. Yu. M. Ivanov, N. F. Bondar', Yu. A. Gavrikov et al., *JETP Letters* **84**, 372 (2006).
  3. W. Scandale, D. A. Still, A. Carnera et al., *Phys. Rev. Lett.* **98**, 154801 (2007).
  4. A. M. Taratin and S. A. Vorobiev, *Phys. Lett. A* **119**, 425 (1987).
  5. A. M. Taratin and S. A. Vorobiev, *Nucl. Instrum. Meth. B* **26**, 512 (1987).
  6. W. Scandale, A. Carnera, G. D. Mea et al., *Phys. Lett. B* **658**, 109 (2008).
  7. V. M. Biryukov, arXiv/0611249.
  8. Г. В. Ковалев, *Письма в ЖЭТФ* **87**, 94 (2008).
  9. L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *Mechanics (Course of Theoretical Physics)*, Volume 1, Butterworth-Heinemann; 3rd Eds. NY, 1976.
  10. E. N. Tsyganov, *Fermilab, TM-682*, page 5, 1976.
  11. K. W. Ford and J. A. Wheeler, *Annals of Physics* **7**, 259 (1959).
  12. K. W. Ford and J. A. Wheeler, *Annals of Physics* **7**, 287 (1959).
  13. R. Newton, *Scattering Theory of Waves and Particles, 2nd Eds.* Springer-Verlag, New York, 1982.
  14. J. O. Hirschfelder, Ch. F. Curtiess, and R. B. Bird, *Molecular theory of gases and liquids, 2nd Eds.* John Wiley and Sons, New York, 1964.
  15. M. V. Berry and K. E. Mount, *Rep. Prog. Phys.* **35**, 315 (1972).