

О критической температуре в бозе-ферми-смеси с притяжением между компонентами

А. М. Белемук, В. Н. Рыжов¹⁾

Институт физики высоких давлений РАН, 142190 Троицк, Московская обл., Россия

Поступила в редакцию 28 декабря 2007 г.

После переработки 27 февраля 2008 г.

На основе эффективного гамильтониана для бозонной подсистемы в смеси вырожденных бозе- и ферми-газов в гармонической ловушке найдено смещение критической температуры бозе-газа в зависимости от числа бозонов и фермионов. Наличие ферми-компоненты приводит к качественно новому характеру закона смещения по сравнению с результатом для одиночного взаимодействующего бозе-газа в ловушке. А именно, зависимость $T_c(N)$ будет иметь другую кривизну при наличии ферми-компоненты.

PACS: 03.75.Lm, 03.75.Kk, 67.57.Fg

Экспериментальное наблюдение бозе-эйнштейновской конденсации в бозе-газах, удерживаемых в магнитных ловушках [1, 2], стимулировало теоретические и экспериментальные исследования неоднородных квантовых газов при сверхнизких температурах [3]. Для экспериментального достижения режима квантового вырождения в случае ферми-газов используется метод симпатического охлаждения (sympathetic cooling), в котором высокая скорость термализации ферми-газа достигается за счет взаимодействия с бозонной компонентой в смеси бозе- и ферми-газов [4–7].

Теоретические работы по исследованию распределения плотности бозе- и ферми-компонент в смеси газов в гармонической ловушке [8, 9] предсказывают различные сценарии поведения профиля плотности компонент в зависимости от характера бозон-фермионного взаимодействия. В частности, в случае притяжения между компонентами состояние смеси становится нестабильным относительно коллапса, который экспериментально наблюдался в смеси ^{40}K - ^{87}Rb [7]. Было обнаружено, что существует некоторое критическое число бозонных атомов N_{cr} , при котором начинается происходить коллапс бозонного и фермионного облаков.

Возникает естественный вопрос о влиянии бозон-фермионного взаимодействия на термодинамические свойства смеси. В частности, вопрос определения критической температуры бозе-эйнштейновской конденсации бозонной компоненты. Для идеального бозе-газа известно, что в присутствии гармонического потенциала $V(\mathbf{r}) = m\omega_{\perp}^2(x^2 + y^2 + \lambda^2 z^2)/2$ (λ – параметр асимметрии ловушки) в пределе больших N

(когда можно использовать квазиклассическое приближение для возбужденных состояний) критическая температура ($k_B = 1$)

$$T_c^{(0)} = \hbar\omega_{\perp} \left(\frac{\lambda N}{\zeta(3)} \right)^{1/3} \simeq 0.94 \hbar\omega_{\perp} (\lambda N)^{1/3}. \quad (1)$$

Учет дискретной структуры энергетических уровней и учет конечного числа атомов в ловушке приводят к поправкам к критической температуре бозе-газа вида $\Delta T/T_c^{(0)} \sim 1/N^{1/3}$, которые существенны при малых N [10, 11]. Учет наличия взаимодействия между атомами в приближении среднего поля приводит к сдвигу критической температуры [12]

$$\frac{\Delta T}{T_c^{(0)}} \simeq -1.33 \frac{a}{a_{\perp}} (\lambda N)^{1/6}, \quad (2)$$

где a – длина рассеяния, $a_{\perp} = \sqrt{\hbar/m\omega_{\perp}}$. Приближение среднего поля дает правильный ответ в линейном по длине рассеяния приближении [12], поскольку согласно критерию Гинзбурга критические флуктуации $\sim g^2$ и нарушают предсказания теории среднего поля в области $|\mu - \mu_c| \lesssim m^3 g^2 (T_c^{(0)})^2 / \hbar^6$ (μ_c – химический потенциал бозе-газа в точке перехода, $g = 4\pi\hbar^2 a/m$ – постоянная взаимодействия).

Отметим, что вопрос определения $\Delta T/T_c^{(0)}$ имеет не только теоретический интерес. В недавних экспериментальных исследованиях [13] сдвиг критической температуры был исследован с большой точностью. В частности, было проверено, что $\Delta T/T_c^{(0)} = \alpha N^{1/6}$ с $\alpha = -0.009$. Теоретическое значение $\alpha = -0.007$ [12] несколько отличается от экспериментального, что связано с необходимостью учитывать не только тепловую компоненту, но и влияние конденсатной вол-

¹⁾e-mail: ryzhov@hppi.troitsk.ru

новой функции на сдвиг критической температуры [14].

В настоящей работе мы представим результаты для критической температуры бозе-компоненты в смеси бозе- и ферми-газов в гармонической ловушке, взаимодействующих посредством сил притяжения. Обычно отправной точкой исследования бозе-газов в ловушках служит уравнение Гросса–Питаевского, обобщенное на случай наличия тепловой компоненты в приближении Хартри–Фока [15, 16]. Уравнение движения для флуктуаций конденсатной волновой функции $\hat{\Phi}'(\mathbf{r}, t) = \langle \hat{\phi}(\mathbf{r}, t) \rangle - \Phi(\mathbf{r})$ определяет спектр элементарных возбуждений системы, который в квазиклассическом приближении около точки перехода (где можно пренебречь наличием конденсатной компоненты) имеет вид $\epsilon(\mathbf{p}, \mathbf{r}) = \mathbf{p}^2/2m + V(\mathbf{r}) + 2gn_T(\mathbf{r})$. Бозе-эйнштейновская конденсация наступает при такой температуре T_c , когда химический потенциал сравнивается с энергией наинизшего энергетического уровня спектра $\epsilon(\mathbf{p}, \mathbf{r})$. Однако в нашей задаче для нахождения спектра элементарных возбуждений сперва необходимо решать самосогласованную задачу о распределении плотности бозонов $n_B(\mathbf{r})$ и фермионов $n_F(\mathbf{r})$. Для численного решения этой задачи можно использовать, например, приближение Томаса–Ферми и метод детерминантов Слэтера для фермионной подсистемы [17].

Наше рассмотрение будет основано на другом подходе, позволяющем аналитическое исследование задачи. Мы будем использовать эффективный гамильтониан для бозе-системы, в котором процессы бозон-фермионного рассеяния эффективно описываются с помощью трехчастичного взаимодействия в подсистеме бозе-частиц.

При выводе эффективного бозонного гамильтониана [18, 19] используется представление статсуммы большого канонического распределения для бозе-ферми-смеси в виде функционального интеграла [15, 21]

$$Z = \int D[\phi^*]D[\phi]D[\psi^*]D[\psi] \times \exp \left\{ -\frac{1}{\hbar}(S_B(\phi^*, \phi) + S_F(\psi^*, \psi) + S_{\text{int}}(\phi^*, \phi, \psi^*, \psi)) \right\}. \quad (3)$$

Интегрирование проводится по бозонным и фермионным полям $\phi(\tau, \mathbf{r})$ и $\psi(\tau, \mathbf{r})$, описывающим соответственно бозе- и ферми-компоненты смеси. Действие для бозе-газа имеет вид

$$S_B(\phi^*, \phi) = \int_0^{\hbar\beta} d\tau \int d\mathbf{r} \left\{ \phi^*(\tau, \mathbf{r}) \left(\hbar \frac{\partial}{\partial \tau} - \frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m_B} + V_B(\mathbf{r}) - \mu_B \right) \phi(\tau, \mathbf{r}) + \frac{g_B}{2} |\phi(\tau, \mathbf{r})|^4 \right\}. \quad (4)$$

Действие для ферми-газа атомов, находящихся в одном и том же спиновом состоянии, что запрещает взаимное s -рассеяние ферми-атомов, имеет такой же вид, как и для невзаимодействующего ферми-газа:

$$S_F(\psi^*, \psi) = \int_0^{\hbar\beta} d\tau \int d\mathbf{r} \left\{ \psi^*(\tau, \mathbf{r}) \left(\hbar \frac{\partial}{\partial \tau} - \frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m_F} + V_F(\mathbf{r}) - \mu_F \right) \psi(\tau, \mathbf{r}) \right\}. \quad (5)$$

Слагаемое, описывающее взаимодействие между компонентами бозе-ферми-смеси имеет вид

$$S_{\text{int}}(\phi^*, \phi, \psi^*, \psi) = g_{BF} \int_0^{\hbar\beta} d\tau \int d\mathbf{r} |\psi(\tau, \mathbf{r})|^2 |\phi(\tau, \mathbf{r})|^2, \quad (6)$$

где $g_B = 4\pi\hbar^2 a_B/m_B$ и $g_{BF} = 2\pi\hbar^2 a_{BF}/m_I$, $m_I = m_B m_F / (m_B + m_F)$, a_B и a_{BF} – амплитуды s -рассеяния при бозон-бозонном и бозон-фермионном рассеяниях, m_B и m_F – соответственно, масса бозе- и ферми-атомов. Параметры μ_B и μ_F задают, соответственно химический потенциал бозонной и фермионной подсистем. Химпотенциал идеального ферми-газа в ловушке зависит от числа фермионов как $\mu_F = \hbar\omega_F (6\lambda N_F)^{1/3}$ [22]. Атомы находятся во внешнем потенциале гармонической ловушки, параметры которой ω_B и ω_F подобраны так, что $m_B \omega_B^2/2 = m_F \omega_F^2/2 \equiv V_0$, следовательно, $\omega_F = \sqrt{m_B/m_F} \omega_B$.

Проводя интегрирование по ферми-полям

$$Z_F = \int D[\psi^*]D[\psi] \times \exp \left(-\frac{1}{\hbar} (S_F(\psi^*, \psi) + S_{\text{int}}(\phi^*, \phi, \psi^*, \psi)) \right), \quad (7)$$

получаем статсумму ферми-системы как функционал бозе-поля $\phi(\tau, \mathbf{r})$

$$Z_F = \exp \left(-\frac{1}{\hbar} S_{\text{eff}} \right),$$

$$S_{\text{eff}} = \int_0^{\hbar\beta} d\tau \int d\mathbf{r} f_{\text{eff}}(|\phi(\tau, \mathbf{r})|),$$

$$f_{\text{eff}} = -\kappa \int_0^{+\infty} \frac{\varepsilon^{3/2} d\varepsilon}{e^{\beta(\varepsilon - \tilde{\mu})} + 1},$$

где $\kappa = \sqrt{2}m_F^{3/2}/3\pi^2\hbar^3$, $\tilde{\mu} = \mu_F - V_F(\mathbf{r}) - g_{BF}|\phi(\mathbf{r}, \tau)|^2$. Рассматривая низкотемпературный режим $T/\tilde{\mu} \ll 1$, можно представить $f_{\text{eff}}(|\phi(\tau, \mathbf{r})|)$ в виде

$$f_{\text{eff}}(|\phi(\tau, \mathbf{r})|) = -\frac{2}{5}\kappa\tilde{\mu}^{5/2} - \frac{\pi^2}{4}\kappa T^2\tilde{\mu}^{1/2}.$$

Вследствие принципа Паули (квантовое давление) радиус бозе-конденсата намного меньше радиуса ферми-облака $R_F \approx \sqrt{\mu_F/V_0}$. Для того чтобы проиллюстрировать это утверждение, оценим размеры ферми- и бозе-систем для характерных значений числа частиц. Радиус ферми-облака $R_F = \sqrt{\mu_F/V_0} = \sqrt{2\mu_F/m_B\omega_B^2} = a_\perp\sqrt{2}(m_B/m_F)^{1/4}(6\lambda N_F)^{1/6}$, то есть $R_F/a_\perp = 1.51 \cdot N_F^{1/6}$, откуда при $N_F = 2 \cdot 10^4$ $R_F/a_\perp = 7.87$, а при $N_F = 10^3$ $R_F/a_\perp = 4.78$. При этом, как показано в нашей предыдущей работе (см. Fig.5 в [20]), в приближении Томаса–Ферми радиус бозонного конденсата в бозе-ферми-смеси варьируется от $R_B/a_\perp \approx 2.4$ при $N_F = 2 \cdot 10^4$ и $N_B = 2 \cdot 10^4$ до $R_B/a_\perp \approx 2.7$ при $N_F = 2 \cdot 10^4$ и $N_B = 5 \cdot 10^4$. Заметим также, что при увеличении числа фермионов при фиксированном числе бозонов радиус конденсата уменьшается. Поэтому, используя разложение по степеням $V_F(\mathbf{r})/\mu_F$, приходим к эффективному гамильтониану [18–22] подсистемы бозонов, включающему только бозонные полевые операторы $\hat{\phi}(\mathbf{r})$:

$$\hat{H}_{\text{eff}} = \int d^3r \left\{ \hat{\phi}^\dagger(\mathbf{r}) \left(-\frac{\hbar^2}{2m_B} \Delta + (V_{\text{eff}}(\mathbf{r}) - \mu_{\text{eff}}) \right) \hat{\phi}(\mathbf{r}) + \frac{g_{\text{eff}}}{2} \hat{\phi}^\dagger(\mathbf{r}) \hat{\phi}^\dagger(\mathbf{r}) \hat{\phi}(\mathbf{r}) \hat{\phi}(\mathbf{r}) + \frac{g_{\text{eff}}^{BF}}{3} \hat{\phi}^\dagger(\mathbf{r}) \hat{\phi}^\dagger(\mathbf{r}) \hat{\phi}^\dagger(\mathbf{r}) \hat{\phi}(\mathbf{r}) \hat{\phi}(\mathbf{r}) \hat{\phi}(\mathbf{r}) \right\}, \quad (8)$$

где

$$\begin{aligned} \mu_{\text{eff}} &= \mu_B - \kappa \mu_F^{3/2} g_{BF} \left(1 + \frac{\pi^2 T^2}{8\mu_F^2} \right), \\ V_{\text{eff}} &= k_0 V_0 (x^2 + y^2 + \lambda^2 z^2), \\ k_0 &= 1 - \frac{3}{2} \kappa \mu_F^{1/2} g_{BF} \left(1 - \frac{\pi^2 T^2}{24\mu_F^2} \right), \\ g_{\text{eff}} &= g_B - \frac{3}{2} \kappa \mu_F^{1/2} g_{BF}^2 \left(1 - \frac{\pi^2 T^2}{24\mu_F^2} \right), \\ g_{\text{eff}}^{BF} &= \frac{3\kappa}{8\mu_F^{1/2}} g_{BF}^3 \left(1 + \frac{\pi^2 T^2}{8\mu_F^2} \right). \end{aligned}$$

Взаимодействие с фермионной подсистемой приводит к изменению частоты потенциала ловушки, перенормировке бозонного химического потенциала, а также ослаблению бозон-бозонного отталкивания. Последнее слагаемое отвечает трехчастичным упругим столкновениям, вызванным бозон-фермионным взаимодействием. В отличие от неупругих трехчастичных столкновений, которые ведут к рекомбинации и удалению частиц из системы [23, 24], это слагаемое при $g_{BF} < 0$ ведет к увеличению плотности частиц в центре ловушки. Положительная кинетическая энергия и энергия отталкивания бозонов ста-

билизируют систему. Однако если плотность в центре ловушки становится слишком большой, то кинетическая энергия и энергия отталкивания бозонов не могут больше компенсировать отрицательное притяжение, и происходит коллапс газа [25]. Динамика коллапса заслуживает отдельного обсуждения, здесь мы лишь ограничимся несколькими качественными замечаниями. В хорошо известных работах Когана с соавторами [23, 24] было показано, что в бозонных системах с притяжением (например, в ^7Li) коллапс происходит в форме динамических осцилляций. При достижении критического числа бозонов в системе начинается динамическое сжатие, определяемое нелинейным членом в уравнении Гросса-Питаевского $\sim -g_B|\phi|^2\phi$, при этом характерное время сжатия $\tau_c \sim (g_B|\phi|^2)^{-1}$ [23, 24]. При повышении плотности трехчастичная рекомбинация, которая может быть записана в виде $-i\alpha_r|\phi|^4\phi$ [24], начинает превалировать над притягивающим межчастичным взаимодействием. Это приводит к тому, что за счет трехчастичной рекомбинации “сжигается” часть конденсата, число атомов в нем становится меньше критического, и конденсат снова начинает расширяться. В дальнейшем число атомов в конденсате вновь возрастает за счет притока бозонов из надконденсатного облака частиц, и процесс повторяется снова. Характерное время трехчастичной рекомбинации имеет вид $\tau_r \sim (\alpha_r|\phi|^4)^{-1}$ [24]. В силу наличия двух зависящих от плотности характерных времен релаксации и существует двухстадийная эволюция бозе-конденсата с притяжением между частицами. В нашем случае характерное время динамического сжатия определяется упругим трехчастичным взаимодействием $\tau_c \sim (g_{\text{eff}}^{BF}|\phi|^4)^{-1}$ и имеет ту же зависимость от плотности, что и характерное время трехчастичной рекомбинации $\tau_r \sim (\alpha_r|\phi|^4)^{-1}$. При этом, как легко показать, используя параметры эффективного гамильтониана (8) и оценки для коэффициента трехчастичной рекомбинации для атомов ^{87}Ru [26], $\alpha_r/g_{\text{eff}}^{BF} \sim 10^{-3} - 10^{-4}$. В этом случае при всех плотностях $\tau_r \gg \tau_c$, то есть процесс коллапса происходит в квазистационарном режиме, без колебаний, характерных для бозе-конденсата с притяжением [24].

Коэффициенты эффективного гамильтониана имеют температурные поправки порядка $(T/\mu_F)^2$. При температурах, близких к температуре бозе-конденсации $T \sim T_c^{(0)}$, величина $(T/\mu_F)^2 \simeq 0.12(N_B/N_F)^{2/3}$ и при $N_B < N_F$ ею можно пренебречь. Эти поправки, однако, становятся существенными при $N_B \gg N_F$. Поскольку мы рассматриваем широкий диапазон изменения N_B , то мы будем учитывать эти поправки. Величина

коэффициента k_0 , как мы увидим далее, близка к единице. Поэтому в расчетах принималось $k_0 = 1$.

Трактуя гамильтониан (8) в приближении среднего поля

$$\begin{aligned}\hat{\phi}^\dagger(\mathbf{r})\hat{\phi}(\mathbf{r})\hat{\phi}(\mathbf{r}) &\simeq 2\langle\hat{\phi}^\dagger(\mathbf{r},\tau)\hat{\phi}(\mathbf{r})\rangle\hat{\phi}(\mathbf{r}), \\ \hat{\phi}^\dagger(\mathbf{r})\hat{\phi}^\dagger(\mathbf{r})\hat{\phi}(\mathbf{r})\hat{\phi}(\mathbf{r})\hat{\phi}(\mathbf{r}) &\simeq 6(\langle\hat{\phi}^\dagger(\mathbf{r})\hat{\phi}(\mathbf{r})\rangle)^2\hat{\phi}(\mathbf{r}),\end{aligned}\quad (9)$$

для плотности частиц $\rho(\mathbf{r}) = \langle\hat{\phi}^\dagger(\mathbf{r})\hat{\phi}(\mathbf{r})\rangle$ получаем обычное квазиклассическое выражение ($\beta = 1/T$)

$$\begin{aligned}\rho(\mathbf{r}) &= \int \frac{d^3p}{(2\pi\hbar)^3} \frac{1}{e^{\beta(\mathbf{p}^2/2m+V'_{\text{eff}}(\mathbf{r})-\mu)} - 1}, \\ V'_{\text{eff}}(\mathbf{r}) &= V_{\text{eff}}(\mathbf{r}) + 2g_{\text{eff}}\rho(\mathbf{r}) + 6g_{\text{eff}}^{BF}\rho^2(\mathbf{r}), \\ \rho(\mathbf{r}) &= \frac{1}{\Lambda^3}g_{3/2}(e^{-y-\beta V'_{\text{eff}}(\mathbf{r})}), \quad y = -\beta\mu_{\text{eff}}, \\ \Lambda &= \left(\frac{2\pi\hbar^2}{mT}\right)^{1/2}, \quad g_\nu(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{x^j}{j^\nu}.\end{aligned}\quad (10)$$

Удерживая первые степени по взаимодействию, в которых вместо точной $\rho(\mathbf{r})$ следует брать плотность $\rho_0(\mathbf{r}) = g_{3/2}(e^{-y-\beta V_{\text{eff}}(\mathbf{r})})/\Lambda^3$ невзаимодействующего бозе-газа в потенциале $V_{\text{eff}}(\mathbf{r})$, и рассматривая область температур, близких к температуре бозе-конденсации ($y \ll 1$), получаем

$$\begin{aligned}\rho(\mathbf{r}, y) &= \frac{1}{\Lambda^3}g_{3/2}(e^{-y-\beta V'_{\text{eff}}(\mathbf{r})}) \simeq \\ &\simeq \frac{1}{\Lambda^3}g_{3/2}(e^{-y-\beta V_{\text{eff}}(\mathbf{r})}) + \beta(2g_{\text{eff}}\rho_0(\mathbf{r}) + \\ &+ 6g_{\text{eff}}^{BF}\rho_0^2(\mathbf{r}))\frac{d}{dy}\frac{1}{\Lambda^3}g_{3/2}(e^{-y-\beta V_{\text{eff}}(\mathbf{r})}) = \\ &= \rho_0(\mathbf{r}, y) + \beta g_{\text{eff}}\frac{d}{dy}\rho_0^2(\mathbf{r}, y) + 2\beta g_{\text{eff}}^{BF}\frac{d}{dy}\rho_0^3(\mathbf{r}, y) \simeq \\ &\simeq \rho_0(\mathbf{r}, y=0) + y\frac{d}{dy}\rho_0(\mathbf{r}, y=0) + \beta g_{\text{eff}}\frac{d}{dy}\rho_0^2(\mathbf{r}, y=0) + \\ &\quad + 2\beta g_{\text{eff}}^{BF}\frac{d}{dy}\rho_0^3(\mathbf{r}, y=0).\end{aligned}\quad (11)$$

Наибольшая плотность достигается в центре ловушки. Когда ее величина достигнет значения $\rho_c \equiv \rho(0, y_c) = g_{3/2}(1)/\Lambda_c^3 = \zeta(3/2)/\Lambda_c^3$, начинается бозе-конденсация газа. Соотношение между критической температурой и плотностью в центре ловушки в рассматриваемом приближении такое же, как для невзаимодействующего бозе-газа. Величина химического потенциала в точке конденсации

$$\begin{aligned}y_c &= -\beta_c(2g_{\text{eff}}\rho_c + 6g_{\text{eff}}^{BF}\rho_c^2) = \\ &= -\frac{2\beta_c g_{\text{eff}}}{\Lambda_c^3}\zeta(3/2) - \frac{6\beta_c g_{\text{eff}}^{BF}}{\Lambda_c^6}\zeta^2(3/2).\end{aligned}$$

Интегрируя выражение (11) по объему газа при $y = y_c$, получаем смещение критической температуры бозе-компоненты смеси относительно ее значения (2) для идеального бозе-газа в ловушке:

$$\begin{aligned}\frac{\Delta T}{T_c^{(0)}} &= -\frac{4\gamma_1}{3\zeta(3)}\frac{a_{\text{eff}}}{\Lambda_{c0}}\left(1 + \gamma_2\frac{g_{\text{eff}}^{BF}}{g_{\text{eff}}\Lambda_{c0}^3}\right), \\ a_{\text{eff}} &= a_B\frac{g_{\text{eff}}}{g_B}, \quad \Lambda_{c0} = \left(\frac{2\pi\hbar^2}{mT_c^{(0)}}\right)^{1/2}.\end{aligned}$$

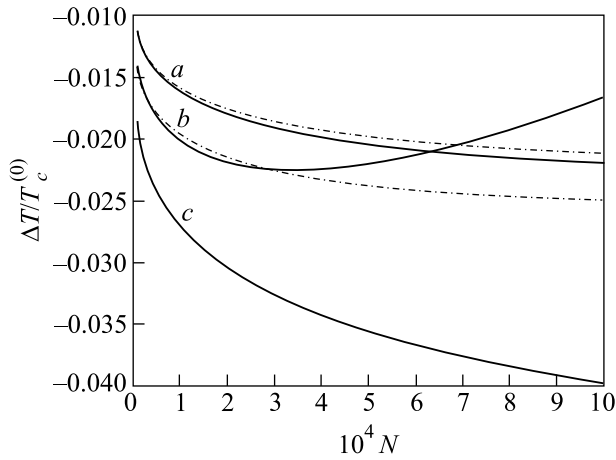
где $\gamma_1 = \zeta(3/2)\zeta(2) - \chi_2/2 \approx 3.09$, $\gamma_2 = (3\zeta^2(3/2)\zeta(2) - \chi_3)/\gamma_1 \approx 9.48$, $\chi_2 = \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}j^{-3/2}k^{-3/2}(j+k)^{-1/2} \approx 2.41$, $\chi_3 = \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}j^{-3/2}k^{-3/2}l^{-3/2}(j+k+l)^{-1/2} \approx 4.37$. Подставляя численные значения коэффициентов и вводя безразмерные параметры $u = 2g_{\text{eff}}/a_\perp^3\hbar\omega_\perp$ и $v = 2g_{\text{eff}}^{BF}/a_\perp^6\hbar\omega_\perp$ (в качестве единиц длины и энергии выбраны параметры гармонического потенциала ловушки $a_\perp = \sqrt{\hbar/m_B\omega_B}$ и $\hbar\omega_\perp = \hbar\omega_B$) получаем зависимость ($N \equiv N_B$)

$$\begin{aligned}\frac{\Delta T}{T_c^{(0)}} &\simeq -1.33\frac{a_{\text{eff}}}{a_\perp}(\lambda N)^{1/6}\left(1 + 0.55\frac{v}{u}(\lambda N)^{1/2}\right) \simeq \\ &\simeq -0.05u(\lambda N)^{1/6} - 0.03v(\lambda N)^{2/3}.\end{aligned}\quad (12)$$

Итак, наличие ферми-компоненты приводит к дополнительному вкладу $\sim N^{2/3}$ в сдвиг критической температуры.

На рисунке приведен график зависимости сдвига критической температуры бозе-компоненты $\Delta T/T_c^{(0)}$ от числа бозонов N при различном числе ферми-атомов. Конкретно для смеси ^{87}Rb и ^{40}K мы используем следующие значения параметров [7]: $a_B = 5.25$ нм, $a_{BF} = -19.4$ нм, $N_F \approx 2 \cdot 10^4$ (кривая a), $\omega_B = 2\pi \cdot 215$ Гц. Параметр частоты потенциала ловушки вдоль оси z есть $\omega_{B,z} = \lambda\omega_B = 2\pi \cdot 16.3$ Гц. При таких значениях параметров характерная ширина распределения конденсата $a_\perp = 735$ нм, параметр асимметрии $\lambda = 0.076$, химический потенциал фермионов $\mu_F \approx 31\hbar\omega_B$, $\omega_F \approx 1.47\omega_B$. Значение коэффициентов эффективного гамильтониана при $T = 0$ есть $k_0 = 1.07$, $u = 0.11$, $v = -0.0003$. Кривые a и b соответствуют зависимости (12). Для сравнения приведен также результат, не учитывающий температурные поправки в коэффициентах эффективного гамильтониана (штрихпунктирные линии). На кривой c мы привели зависимость (2) для одиночного бозе-газа с тем же параметром асимметрии λ .

Видно, что наличие бозон-фермионного притяжения ведет к качественно другому закону сдвига критической температуры от числа частиц. В частнос-



Кривые a, b : зависимость сдвига критической температуры бозе-компоненты в бозе-ферми-смеси (12) в зависимости от числа бозонов N при различном числе фермионов. Кривая a : $N_F = 2 \cdot 10^4$, кривая b : $N_F = 10^3$. Непрерывная линия и штрихпунктирная линия – соответственно, с учетом и без учета температурной зависимости коэффициентов эффективного гамильтониана (8). Кривая c : одиночный бозе-газ со взаимодействием в гармонической ловушке (2)

ти, для бозе-ферми-смеси кривая $\Delta T/T_c^{(0)}(N)$ имеет минимум. При относительно малом числе фермионов (кривая b) этот минимум находится внутри области стабильности системы. Для кривой a этот минимум лежит вне области стабильности системы (напомним, что при $N \sim N_{cr} \approx 10^5$ происходит коллапс бозонного и фермионного облаков). Это означает, что с увеличением числа фермионов будет происходить изменение знака кривизны зависимости $T_c(N)$. В случае a сдвиг T_c составляет примерно половину от того значения, которое следовало ожидать для одиночного бозе-газа и вплоть до критического числа бозонов $N_{cr} \sim 10^5$ слабо зависит от числа бозонов N .

Отметим, что температурные поправки к коэффициентам эффективного гамильтониана (8), вообще говоря, являются существенными, что приводит к существенному изменению $\Delta T/T_c^{(0)}(N)$. Для точного количественного описания сдвига критической температуры следует использовать метод ренорм-группы [27] или численные методы, например, диаграммный метод Монте-Карло [28].

Работа выполнена при поддержке CRDF (грант # BF4M11 (АМБ)) и Российского фонда фундаментальных исследований (Грант # 08-02-00781).

1. M. H. Anderson, J. R. Ensher, M. R. Matthews et al., *Science* **269**, 198 (1995).

2. C. C. Bradley, C. A. Sackett, J. J. Tollet, and R. G. Hulet, *Phys. Rev. Lett.* **75**, 1687 (1995).
 3. F. Dalfovo, S. Giorgini, L. P. Pitaevskii, and S. Stringari, *Rev. Mod. Phys.* **71**, 463 (1999).
 4. E. Timmermans and R. Cote, *Phys. Rev. Lett.* **80**, 3419 (1998).
 5. W. Geist, L. You, and T. A. B. Kennedy, *Phys. Rev. A* **59**, 1500 (1999).
 6. F. Schreck, L. Khaykovich, K.L. Corwin et al., *Phys. Rev. Lett.* **87**, 080403 (2001).
 7. G. Modugno, G. Roati, F. Riboli, F. Ferlaino et al., *Science* **297**, 2240 (2002).
 8. R. Roth, *Phys. Rev. A* **66**, 013614 (2002).
 9. R. Roth and H. Feldmeier, *Phys. Rev. A* **65**, 021603 (2002).
 10. W. Ketterle and N. J. van Druten, *Phys. Rev. A* **54**, 656 (1996).
 11. K. Kristen and D. J. Toms, *Phys. Rev. A* **54**, 4188 (1996).
 12. S. Giorgini, L. P. Pitaevskii, and S. Stringari, *Phys. Rev. A* **54**, R4633 (1996).
 13. F. Gerbier, J. H. Thywissen, S. Richard et al., *Phys. Rev. Lett.* **92**, 030405 (2004), *Phys. Rev. A* **70**, 013607 (2004).
 14. Y.-M. Kao and T. F. Jiang, *Phys. Rev. A* **73**, 043604 (2006).
 15. V. N. Popov, *Functional Integrals in Quantum Field Theory and Statistical Physics*, Reidel, Dordrecht, 1983.
 16. A. Griffin, *Phys. Rev. A* **53**, 9341 (1996).
 17. N. Nygaard and K. Molmer, *Phys. Rev. A* **59**, 2974 (1999).
 18. S. T. Chui and V. N. Ryzhov, *Phys. Rev. A* **69**, 043607 (2004).
 19. S. T. Chui, V. N. Ryzhov, and E. E. Tareyeva, *JETP Lettes* **80**, 274 (2004).
 20. A. M. Belemuk, N. M. Chtchelkatchev, V. N. Ryzhov, and S.-T. Chui, *Phys. Rev. A* **73**, 053608 (2006).
 21. H. T. C. Stoof, in *Coherent Atomic Matter Waves*, Proceedings of the Les Houches Summer School Session LXXII, UJF NATO Advanced Study Institute, 1999, Eds. R. Kaiser, C. Westbrook, and F. David, EDP Sciences, Springer-Verlag, 2001, pp. 219-316.
 22. D. A. Butts and D. S. Rokhsar, *Phys. Rev. A* **55**, 4346 (1997).
 23. Yu. Kagan, E. L. Surkov, and G. V. Shlyapnikov, *Phys. Rev. Lett.* **79**, 2604 (1996).
 24. Yu. Kagan, A. E. Muryshev, and G. V. Shlyapnikov, *Phys. Rev. Lett.* **81**, 933 (1998).
 25. Yu. Kagan, G. V. Shlyapnikov, and J. T. M. Walraven, *Phys. Rev. Lett.* **76**, 2670 (1996).
 26. E. A. Burt, R. W. Ghrist, C. J. Myatt et al., *Phys. Rev. Lett.* **79**, 337 (1997).
 27. M. Bijlsma and H. T. C. Stoof, *Phys. Rev. A* **54**, 5085 (1996).
 28. E. Burovski, N. Prokof'ev, B. Svistunov, and M. Troyer, *Phys. Rev. Lett.* **96**, 160402 (2006).