Письма в ЖЭТФ, том 48, вып. 2, стр. 71 – 74 25 июля 1988 г.

ЛИНЕЙНАЯ ТРАНСФОРМАЦИЯ ВОЛН В ПЛАЗМЕ В ОТСУТСТВИЕ ГИБРИДНОГО РЕЗОНАНСА

Е.З.Гусаков, А.Д.Пилия

Обнаружен новый резонансный механизм замедления электростатических волн в плазме с периодической неоднородностью.

Одним из интересных и практически важных эффектов электродинамики плазмы является гибридный резонанс. С математической точки зрения он представляет собой особенность решений уравнения

$$\operatorname{div}(\hat{\epsilon}\,\vec{\nabla}\varphi) = 0, \tag{1}$$

где $\varphi(\mathbf{r})$ – скалярный потенциал и $\hat{\epsilon}$ – тензор электрической проницаемости холодной плазмы, возникающую из-за пересечения в особой точке или асимптотического сближения характеристик этого уравнения [1]. В настоящей работе показано, что явление, аналогичное гибридному резонансу возможно в двумерно-неоднородной среде, ограниченной по одной координате и периодически неоднородной по другой, в области частот, где "обычный" гибридный резонанс отсутствует. Важнейшим примером такой геометрии служит аксиально-симметричная тороидальная конфигурация. Мы, однако, ограничимся здесь наиболее наглядным примером – распространением косой ленгмюровской волны в плоском плазменном волноводе со слабой периодической неоднородностью вдоль оси z, по которой направлено внешнее магнитное поле. Эта волна описывается волновым уравнением (1), которое принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial x}\,\epsilon\,\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial z}\,\eta\,\frac{\partial\varphi}{\partial z} = 0, \tag{2}$$

где $\epsilon = \epsilon_{xx}$ $\eta = \epsilon_{zz}$. Предположим, что ϵ и η зависят от z периодически с периодом $2\pi/\kappa$, причем $\epsilon > 0$, а область прозрачности $\eta < 0$ ограничена интервалом $x_1 \leqslant x \leqslant x_2$. Будем рассматривать решения уравнения (2) типа волноводных мод, бегущих вдоль оси z, и рассмотрим моды, для которых применимо приближение геометрической оптики. Распространение волн можно при этом описать с помощью лучевых траекторий, которые в данном случае совпадают с характеристиками уравнения (2). В волноводной конфигурации лучевая траектория последовательно отражается от "стенок" x_1 и x_2. Обозначим через z_i координату точки i-ой встречи некоторой траектории со стенкой и пусть Δ_i будет расстояние до следующей (i +1-ой) такой точки. В среде, неоднородной по z, смещение будет функцией z_i, причем зависимость будет, очевидно периодической. При малой "глубине модуляции" можно сохранить два первых члена разложения в ряд Фурье: $\Delta_i(z_i) = \Delta_0 + b\sin\kappa z_i$ (начало отсчета z выбрано так, чтобы отсутствовала постоянная фаза в аргументе синуса). Тогда эволюция лучевой траектории описывается отображением

$$z_{i+1} = z_i + \Delta_0 + b\sin\kappa z_i \tag{3}$$

свойства которого хорошо известны [2]. При выполнении условия

$$|\kappa\Delta_0 - 2\pi n| < \kappa|b|, \qquad n = 1, 2 \ldots \tag{4}$$

имеются две периодические траектории (таких, что $z_{i+1} = z_i + 2\pi n/\kappa$), одна из которых является устойчивой, все остальные траектории приближаются к ней по экспоненциальному закону. По такому же закону возрастает волновой вектор волны. Такое поведение лучевых траекторий аналогично тому, которое имеет место при гибридном резонансе в плоскослоистой среде при угле между направлением неоднородности и магнитным полем, отличным от 0 или $\pi/2$. Наличие асимптоты у лучевых траекторий, которые в случае уравнения (1)–(2) являются также эквипотенциалями, означает, что любое решение уравнения (2) будет иметь особенность при $z \to \infty$. Бесконечное замедление волны останавливается, однако, пространственной дисперсией. Чтобы проанализировать этот случай, конкретизируем уравнение (2), полагая $\eta = -\eta_0(x)[1+\beta(x)\sin\kappa z]$, $\epsilon = 1$ и учтем в нем тепловую поправку. Тогда соответствующее дисперсионное уравнение принимает вид

$$D(\mathbf{r},\mathbf{k}) = 0, \quad D = k_x^2 - \eta_0\left[1 + \beta(x)\sin\kappa z + 3\frac{v_T^2 k_z^2}{\omega^2}\right]k_z^2 \ , \tag{5}$$

где $v_T^2 = T_e/m_e$. Лучевые траектории являются, как известно, траекториями механической системы с функцией Гамильтона D. Для их рассмотрения удобно сделать каноническое преобразование от переменных x, k_x к новой переменной $\alpha(x)$, изменяющейся вдоль траектории монотонно и сопряженному с ней импульсу k_α согласно соотношениям

$$\lambda\frac{d\alpha}{dx} = \pm\sqrt{\eta_0}\,, \quad \lambda k_x = \pm\sqrt{\eta_0}\,k_\alpha \ ,$$

где λ – постоянная. Старая координата x является периодической функцией α; постоянную λ выбираем так, чтобы период функции $x(\alpha)$ был равен 2π: $\lambda = \frac{1}{\pi}\int\limits_{x_1}^{x_2}\sqrt{\eta_0}\,dx$ при этом $\Delta_0 = 2\pi\lambda$ и условие резонанса $\Delta_0\kappa = 2\pi n$ принимает вид $\kappa\lambda = n$. Разлагая периодическую функцию $\beta(x(\alpha))$ в ряд Фурье и учитывая, что в нулевом (по малым параметрам β и $k_z v_T$) приближении $z = \lambda\alpha$ мы можем сохранить в гамильтониане медленней всего осциллирующие резонансные слагаемые $\beta(\alpha)\sin\kappa z \to \beta_n\sin\zeta$,
где

$$\zeta = n\alpha - \kappa z, \quad \beta_n = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\beta[x(\alpha)]\cos n\alpha\, d\alpha .$$

После этого упрощения выполним следующее каноническое преобразование $(\alpha, k_\alpha)(z, k_z) \to (\alpha, p), (\zeta, k)$. При этом $k = k_z/\kappa$ $p = k_\alpha + nk_z/\kappa$ и функция D принимает вид

$$D = \left[\frac{p - nk}{\kappa\lambda}\right]^2 - k^2(1 + \beta_n\sin\zeta) - \gamma k^4 \ , \tag{6}$$

где $\gamma = 3v_T^2\kappa^2/\omega^2$. Поскольку гамильтониан не зависит от α, импульс сохраняется и уравнение $D(\zeta, k, p) = 0$ позволяет непосредственно построить фазовые траектории $k(\zeta, p)$. Периодической траектории, описанной выше, соответствует кривая $p = 0$; "холодные" волны ($\gamma p^2 \ll 1$) замедляются до $k_z \sim \frac{\omega}{v_T}\sqrt{\beta_n}$. Поведение кривых можно интерпретировать как линейную трансформацию в "теплую" моду вблизи устойчивой периодической траектории и обратную трансформацию в холодную волну. Проведенное выше рассмотрение основано на использовании геометрикооптического приближения, строгое обоснование которого в случае двумерно неоднородной среды затруднительно. Отметим однако, что вывод об экспоненциальном росте замедления волны при выполнении условия (3) может быть сделан и без анализа поведения лучевых траекторий.

Заметим, что при $\beta(x) = 0$ поле $\varphi(x,z)$ может быть представлено в виде суперпозиции собственных волноводных мод

$$\varphi(x,z) = \sum_m A_m\,\varphi_m(x)\exp(ik_m z), \tag{7}$$

где

$$\varphi_m = \sqrt{\frac{2\lambda}{\pi}}\,\eta_0^{-1/4}\cos\left[k_m\int\limits_{x_1}^{x}\sqrt{\eta_0}\,dx' - \frac{\pi}{4}\right], \quad k_m = \frac{m + {}^1/_2}{\lambda}\ , \quad m > 0$$

Такое представление справедливо и при наложении на волновод слабой периодической модуляции $|\beta| \ll 1$. Однако в этом случае моды взаимодействуют между собой, так что их амплитуда переменна по длине волновода $A_m = A_m(z)$. Взаимодействие мод должно быть особенно эффективно при выполнении условий резонанса для рассеяния мод на длинноволновой модуляции $k_{m+n} - k_m = \kappa$. Легко видеть, что это условие совпадает с условием (3) при $\beta \to 0$ и выполняется для любого номера моды m. Считая расстройку резонанса малой $|k_{m+n} - k_m| \ll \kappa$ можно получить систему уравнений, описывающую эволюцию амплитуд A_m. Подставляя (7) в уравнение (2) и пренебрегая малыми и быстро осциллирующими членами получим

$$\frac{\partial C_m}{\partial z} - ik_m \beta_n \delta C_m = \frac{\beta_n k_n}{4} [C_{m+n} - C_{m-n}], \tag{8}$$

где

$$C_m = A_m k_m \exp(i\beta_n \delta k_m z), \quad \delta = 2\left(1 - \frac{\kappa\lambda}{n}\right)\beta_n^{-1}.$$

Преобразованием Фурье $C_m(z) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} C(\nu, t) \exp\left(-\frac{ik_m\lambda}{n}\nu\right) d\nu$ система рекурентно связанных дифференциальных уравнений сводится к уравнению

$$\frac{\partial C}{\partial t} + (\sin\nu - \delta)\frac{\partial C}{\partial \nu} + \cos\nu C = 0, \tag{9}$$

где $t = n\beta_n z / 2\lambda$. Решение уравнения (9) $C(\nu, t)$ может быть выражено через "начальное условие" с помощью метода характеристик

$$C(\nu, t) = C_0(\nu_0(\nu, t)) \frac{\sin\nu_0 - \delta}{\sin\nu - \delta}, \qquad C_0(\nu) = C(\nu, 0). \tag{10}$$

При $|\delta| < 1$ характеристики уравнения (9) $\nu_0(\nu, t)$ задаются соотношением

$$\frac{\sqrt{1-\delta^2}\cos\nu + 1 - \delta\sin\nu}{\sin\nu - \delta} = e^{-\sqrt{1-\delta^2}\,t}\,\frac{\sqrt{1-\delta^2}\cos\nu_0 + 1 - \delta\sin\nu_0}{\sin\nu_0 - \delta}, \tag{11}$$

и при $t \to \infty$ сходятся к $\nu = \nu_*$, $\cos\nu_* = -\sqrt{1-\delta^2}$. Определяя с помощью (10) $A_m(z)$ и подставляя это выражение в (7) получим распределение электрического поля $E_z = \partial\varphi/\partial z$ в волноводе

$$E[\alpha(x), z] = E^+ + iE^-, \tag{12}$$

$$E^{\pm} = \frac{1}{2}\,\frac{\sin\nu_0 - \delta}{\sin\nu - \delta}\left\{E\left(\frac{\nu_0}{n}, 0\right) - iE\left(-\frac{\nu_0}{n}, 0\right)\right\}_{\nu = \kappa z \pm n\alpha},$$

где $0 \leqslant \alpha \leqslant \pi$, $\varphi(\alpha + \pi k, 0)$ определяется через $\varphi(\alpha, 0)$ с помощью формулы (7); $\nu_0 = \nu_0(\nu, t)$ согласно (11). Эта формула описывает волны, приходящие в точку наблюдения после отражения от противоположных "стенок" волновода и бегущие в сечении $z = 0$ в противоположные стороны. Стоящий перед фигурной скобкой фактор описывает экспоненциальное усиление поля при сближении характеристик и замедлении волны.

Подчеркнем в заключение, что рассмотренная выше на примере потенциальной плазменной волны особенность в действительности присуща любой волновой системе гиперболического типа с параметрами, периодически зависящими от одной из координат или времени.

Литература

1. *Пилия А.Д., Федоров В.И.* ЖЭТФ, 1971, **60**, 389.
2. *Jensen M.H., Bak P., Bhor T.* Phys. Rev. Lett., 1983, **50**, 1637.

Физико-технический институт им. А.Ф.Иоффе
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
19 апреля 1988 г.