

## Автофазировка дрейфовых волн

С. В. Баталов, В. Наулин<sup>+</sup>, И. И. Расмуссен<sup>+1)</sup>, А. Г. Шагалов<sup>2)</sup>

Институт физики металлов Уральского отд. РАН, 620041 Екатеринбург, Россия

<sup>+</sup>Risoe National Laboratory, Technical University of Denmark, 4000 Roskilde, Denmark

Поступила в редакцию 22 мая 2008 г.

После переработки 10 июня 2008 г.

Показано, что эффект автофазировки может быть использован для генерации и управления дрейфовыми волнами большой амплитуды в замагниченной плазме.

PACS: 47.32.-y, 52.35.Mw, 52.35.Kt

Явление автофазировки (или, в другой терминологии, “авторезонанса”) используется в настоящее время как эффективный способ управления динамикой нелинейных систем с помощью внешней накачки. Вихревые структуры в плазме и гидродинамике представляют собой одни из наиболее привлекательных объектов для такого управления. Основанный на автофазировке метод успешно применялся для возбуждения вихревых мод в электронной плазме, где управление осуществлялось вращающимся электрическим полем с медленно изменяющейся частотой [1]. Аналогичная задача была решена для вихрей в идеальной жидкости, где управление может быть осуществлено внешним вращающимся потоком жидкости с медленно меняющейся угловой частотой [2, 3].

В данной работе мы покажем, что эффект автофазировки может быть использован для генерации дрейфовых волн в плазме и, в частности, крупномасштабных флуктуаций типа зонального потока, а также последующего управления их динамикой. Хорошо известно [4], что именно крупномасштабные флуктуации поля могут быть ответственны за образование “барьеров”, препятствующих убеганию частиц из плазмы, удерживаемой магнитным полем. Поэтому возможность генерации и управления такими флуктуациями с помощью внешних переменных полей представляется весьма важной для проблемы контроля транспорта частиц из плазмы.

Основная идея автофазировки восходит еще к работам [5, 6] по ускорению релятивистских частиц. Адекватная теория этого эффекта была предложена в работе [7] для простейшей модели нелинейного маятника, возбуждаемого периодической накачкой с частотой, медленно меняющейся вблизи линейного резонанса системы. Если амплитуда накачки превышает

некоторое критическое значение, зависящее от скорости изменения частоты, то фаза маятника оказывается захваченной внешней накачкой, что дает возможность эффективно управлять амплитудой колебаний маятника, просто меняя частоту накачки. В настоящее время эта идея получила развитие для ряда более сложных физических систем (см., например, [8, 9]) и, в частности, для нелинейных волн и солитонов [10–12].

В данной работе мы будем рассматривать возбуждение волн большой амплитуды и управление их динамикой в рамках уравнения Хасегавы-Мимы [13] для квазинейтральной замагниченной плазмы:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\psi - \Delta\psi) - \{\psi, \ln n_0\} = \{\psi, \Delta\psi\}. \quad (1)$$

Рассматриваем двумерную задачу в круге радиуса  $R$  с радиальным распределением плотности  $n_0(r)$ . В уравнении  $\psi(r, \theta, t)$  – электростатический потенциал, заданный в полярной системе координат  $r, \theta$ . Якобиан в (1) имеет вид  $\{a, b\} = (1/r)(a_\theta b_r - a_r b_\theta)$ . Волны возбуждаются накачкой через граничные условия

$$\psi(r, \theta, t)|_{r=R} = \Psi(\theta, t) = \varepsilon \cos\left(m\theta - \int^t \Lambda(t) dt\right), \quad (2)$$

задающие потенциал на границе области. В (2)  $m = 1, 2, \dots$ , а амплитуда накачки предполагается малой,  $\varepsilon \ll 1$ . Будем предполагать также, что частота накачки  $\Lambda(t)$  является медленной функцией времени. Для упрощения мы будем предполагать линейную зависимость

$$\Lambda(t) = \Lambda_0 - \alpha(t - t_0), \quad (3)$$

где скорость изменения частоты  $\alpha > 0$  предполагается малой.

Для случая замагниченной плазмы данная постановка задачи близка к условиям экспериментальной

<sup>1)</sup>V. Naulin, J.J. Rasmussen.

<sup>2)</sup>e-mail: shagalov@imp.uran.ru

работы [14], в которой дрейфовые волны в плазменном цилиндре генерировались системой металлических пластин, расположенных по внешней границе плазменного шнура. Пластины заряжались от внешнего источника с азимутальным сдвигом фазы, моделируя распределение потенциала вида (2).

Отметим, что уравнение (1) имеет обширную область приложений также в геофизической гидродинамике, где оно известно как уравнение Чарни-Обухова. В частности, постановка задачи (1), (2) может соответствовать экспериментам с волнами Россби во вращающихся сосудах с жидкостью [15, 16] в которых, вблизи внешней границы, располагалась система инжекторов, обеспечивающих приток жидкости на границе с радиальной скоростью

$$v_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi(\theta, t)}{\partial \theta},$$

где  $\Psi(\theta, t)$  определена в (2).

Рассмотрим сначала случай, когда частота накачки постоянна,  $\Lambda = \Lambda_0$  (то есть  $\alpha = 0$ ). Везде в дальнейшем будем рассматривать распределение плотности следующего вида:

$$n_0(r) = \text{const} \cdot \exp\{-r^2/d^2\}. \quad (4)$$

Для такого распределения градиентный параметр  $\sim r^{-1} \nabla_r \log n_0$  будет постоянным, что существенно упрощает анализ решений уравнения (1). В данном случае уравнение (1) имеет решение вида

$$\psi = A(r) \cos(\Lambda t - m\theta), \quad (5)$$

где амплитуда  $A(r)$  описывается линейным уравнением

$$A'' + \frac{1}{r} A' + \left[ \kappa^2 - \frac{m^2}{r^2} \right] A = 0. \quad (6)$$

Здесь мы ввели

$$\kappa^2(\Lambda) = \frac{2m}{d^2} \frac{1}{\Lambda} - 1. \quad (7)$$

Если  $0 < \Lambda < 2m/d^2$ , то решение, удовлетворяющее граничным условиям (2), принимает вид

$$A(r) = \varepsilon \frac{J_m(\kappa(\Lambda)r)}{J_m(\kappa(\Lambda)R)}. \quad (8)$$

Важно отметить, что нелинейность на этих решениях  $\{\psi, \Delta\psi\} \equiv 0$ . Таким образом, полученное решение не имеет ограничений по амплитуде. Оно является точным решением уравнения (1) и известно как волна Россби.

Условие  $J_m(\kappa(\Lambda_k)R) = 0$ , когда амплитуда стремится к бесконечности, дает набор резонансных частот  $\Lambda = \Lambda_k$  для каждого  $m$ . Их можно упорядочить по возрастанию:  $\Lambda_1 > \Lambda_2 > \dots > 0$ .

Если  $\varepsilon = 0$ , существует особый тип решений с произвольной амплитудой  $A(r) = \text{const} \cdot J_m(\kappa(\Lambda_k)r)$ . Он имеет дискретный спектр, состоящий из резонансных частот  $\{\Lambda_k\}$ , и следует из (8) в пределе  $\varepsilon \rightarrow 0$ ,  $\Lambda \rightarrow \Lambda_k$ , когда отношение  $\varepsilon/J_m(\kappa(\Lambda))$  остается постоянным.

Для возбуждения волн в уравнении (1) мы, следуя обычной технологии, применяемой при автофазировке, будем использовать накачку с плавно меняющейся частотой вида (3), где  $\Lambda_0$  будет одной из резонансных частот. Таким образом, в некоторый момент времени  $t = t_0$  мы будем плавно проходить резонансную частоту.

Для численных расчетов использовался стандартный псевдоспектральный метод по азимутальному углу и разностная сетка в радиальном направлении. Потенциал в (1) записывается в виде

$$\psi(r, \theta, t) = \psi_0(r, t) + \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} \psi_m(r, t) e^{im\theta} + \text{c.c.} \right\}, \quad (9)$$

где не зависящая от азимутального угла компонента  $\psi_0(r, t)$  представляет “зональный поток”. Для удобства интерпретации результатов введем интегральные амплитуды

$$\begin{aligned} a_0(t) &= \int_0^R \psi_0(r, t) r dr, \\ a_m(t) &= 2 \int_0^R |\psi_m(r, t)| r dr, \quad m \geq 1, \end{aligned} \quad (10)$$

и усредненные разности между фазой возбуждаемой моды  $\eta_m(r, t) = \arg(\psi_m(r, t))$  и фазой волны накачки

$$\Phi_m(t) = \frac{1}{mR} \int_0^R \left( \eta_m(r, t) - \int^t \Lambda(t) dt \right) dr. \quad (11)$$

На рис.1 представлены результаты возбуждения волны при накачке вида (2), (3) для основной моды с  $m = 1$ . В качестве начальных условий мы полагали  $\psi = 0$ . Как оказалось, результаты не зависят от начальных возмущений, если они малы. В частности, малые случайные начальные возмущения (с амплитудой не выше  $10^{-3}$ ) давали такие же результаты.

Пока частота накачки остается больше резонансной частоты,  $\Lambda(t) > \Lambda_1 \approx 0.4282$ , в системе возбуждается волна, близкая к волне Россби с амплитудой (8). Амплитуда генерируемой волны  $a_1(t)$  показана на рис.1а (сплошная линия 2). Видно, что она флуктуирует вблизи интегральной амплитуды

$$\bar{A} = \int_0^R A(r) dr \quad (12)$$

для волны Россби (пунктирная линия 1).

После прохождения резонансной частоты процесс существенно зависит от скорости изменения частоты  $\alpha$ . Это различие в поведении хорошо иллюстрируется на рис.1b для зависимости разности фаз (11) между накачкой и генерируемой волной. Если  $\alpha$  больше

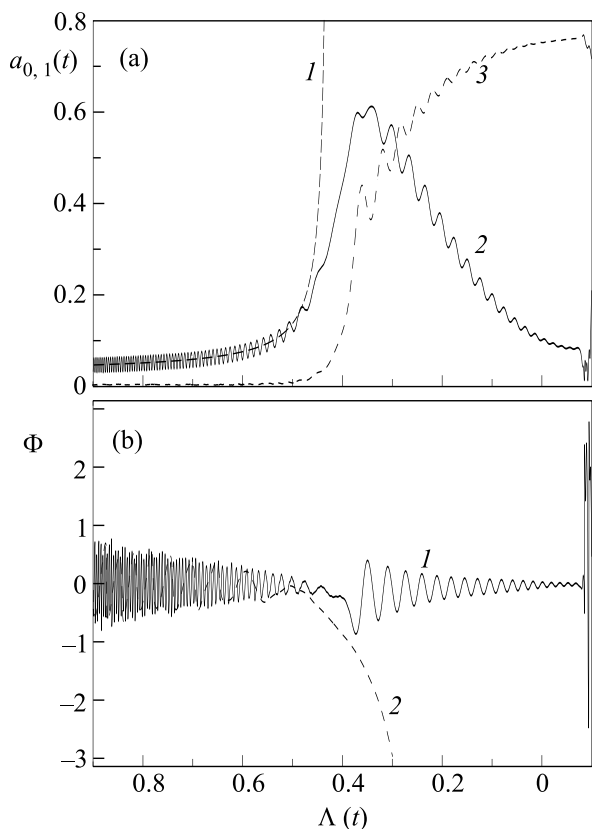


Рис.1. Возбуждение нелинейной волны и зонального потока;  $R = 2, d = 1, \Lambda_0 = 0.4282, \varepsilon = 0.025, m = 1$ . (a)  $\alpha = 0.0003$ ; линия 1 – амплитуда волны Россби (12); 2 – амплитуда возбуждаемой моды  $a_1(t)$ ; 3 – амплитуда зонального потока; (b) разность фаз (11) между возбуждаемой модой и накачкой; линия 1 –  $\alpha = 0.0003$ , 2 –  $\alpha = 0.002$

некоторого критического значения  $\alpha_{cr}(\varepsilon)$ , возникает быстрая расфазировка возмущения и накачки (линия 2). Если же  $\alpha < \alpha_{cr}(\varepsilon)$ , то, наоборот, возникает захват фазы генерируемой волны внешним возмущением (линия 1). Этот эффект захвата фазы и называется автофазировкой.

Отметим, что при автофазировке, сразу после прохождения резонанса, начинается интенсивный рост амплитуды генерируемой волны (рис.1a, сплошная линия 2). Существенным является факт возник-

новения зонального потока  $a_0(t)$  (пунктирная линия 3), как только амплитуда генерируемой волны становится достаточно большой. Более того, при дальнейшем уменьшении частоты ( $\Lambda(t) < 0.3$ ) почти вся энергия генерируемой моды преобразуется в зональный поток. Наконец, когда частота накачки становилась малой, наблюдалось нарушение фазового синхронизма и насыщение амплитуд генерируемых мод. Отметим также, что в диапазоне  $\Lambda(t) < \Lambda_1$  происходит последовательное прохождение линейных резонансов  $\Lambda_2, \Lambda_3$  и т.д., что никак не сказывается на процессе автофазировки. Это объясняется тем, что генерируемая волна в нелинейной стадии сильно отличается от волн Россби вида (8), о чем свидетельствует, в частности, появление зонального потока большой амплитуды.

Исследование критических значений  $\alpha$ , при которых происходит автофазировка, приведено на рис.2. Хорошо видна степенная зависимость  $\alpha_{cr} \sim \varepsilon^{1.46}$ , яв-

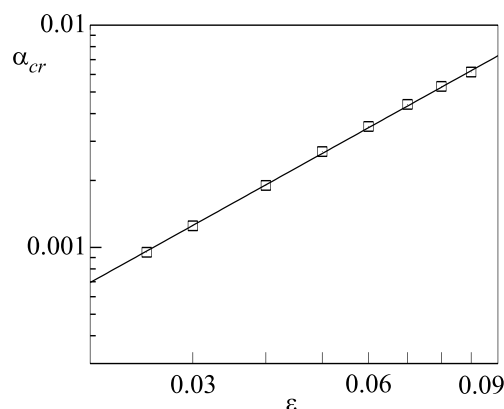


Рис.2. Зависимость критических значений  $\alpha_{cr}$  от амплитуды накачки  $\varepsilon$  (квадраты). Сплошная линия – зависимость  $\alpha_{cr} \sim \varepsilon^{1.46}$

ляющаяся типичной для автофазировки [8]. Однако величина показателя несколько отличается от известного теоретического значения, равного  $4/3$ .

Исследования показывают, что эффект автофазировки позволяет не только эффективно генерировать волны большой амплитуды, но и управлять их динамикой, меняя частоту внешней накачки  $\Lambda(t)$  подходящим образом. Единственным условием, накладывающим ограничение на эту зависимость, является требование, чтобы вариации частоты были достаточно медленными, то есть в каждый момент времени было выполнено критическое условие  $|\alpha| = |d\Lambda/dt| < \alpha_{cr}(\varepsilon)$ .

Для иллюстрации такого управления мы использовали зависимость  $\Lambda(t)$ , приведенную на рис.3a. Начальная стадия процесса аналогична исследованно-

му ранее случаю. В момент прохождения резонансной частоты  $\Lambda_1$  начинается процесс захвата фазы (рис.3б) и рост амплитуд возбуждаемой гармоник и зонального потока (рис.3с). Затем, при фиксации

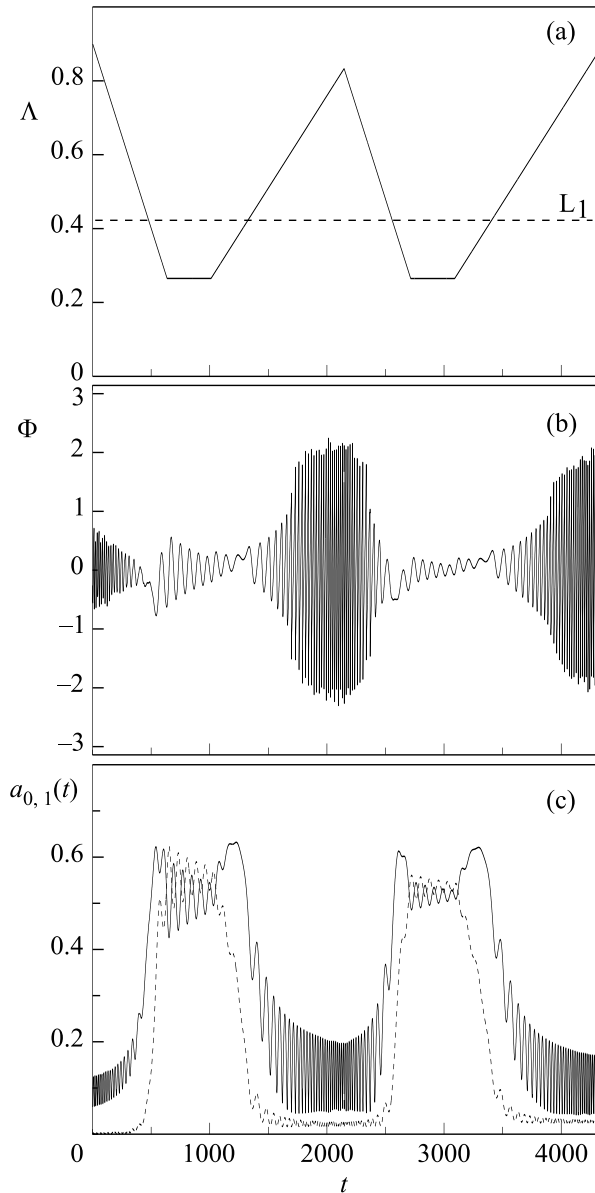


Рис.3. Управление процессом возбуждения дрейфовой волны;  $R = 2$ ,  $d = 1$ ,  $\varepsilon = 0.05$ ;  $m = 1$ ,  $\Lambda_1 = 0.4282$ ; (а) – зависимость частоты накачки от времени, (б) – разность фаз (11) между возбуждаемой модой и накачкой, (с) – амплитуда возбуждаемой моды  $a_{0,1}(t)$  – сплошная линия; амплитуда зонального потока  $a_0(t)$  – пунктирная линия

частоты внешней накачки, наблюдалась стабилизация амплитуд. В следующей стадии мы увеличивали частоту. Амплитуда волн начинала уменьшаться и,

после прохождения резонансной частоты, нарушался фазовый синхронизм. В дальнейшем ( $t \sim 2000$ ) амплитуда волн возвращалась к величинам, близким к первоначальным. Дальнейшее уменьшение частоты накачки приводит к повторению процесса автофазировки. Этот процесс возбуждения волн, стабилизации их на определенном уровне и последующего де-возбуждения до амплитуд, близких к первоначальным, может повторяться несколько раз. На рис.3 изображены два периода этого процесса.

Таким образом, приведенные выше численные исследования показывают, что метод автофазировки может быть использован для генерации и управления дрейфовыми волнами большой амплитуды в замагниченной плазме с накачкой вращающимся электростатическим полем, угловая частота которого медленно меняется со временем. Эта частота, в данном случае, выступает в качестве управляющего параметра, если выполнены определенные критические соотношения на амплитуду накачки и скорость изменения частоты. Особо следует отметить, что в результате автофазировки возникает зональный поток большой амплитуды.

1. J. Fajans, E. Gilson, and L. Friedland, Phys. Rev. Lett. **82**, 4444 (1999).
2. L. Friedland and A.G. Shagalov, Phys. Rev. Lett. **85**, 2941 (2000).
3. L. Friedland and A.G. Shagalov, Phys. Fluids **14**, 3074 (2002).
4. P. W. Terry, Rev. Mod. Phys. **72**, 109 (2000).
5. E. M. McMillan, Phys. Rev. **68**, 143 (1945).
6. В. И. Векслер, Доклады АН СССР **44**, 346 (1944).
7. В. В. Чириков, Доклады АН СССР **125**, 1015 (1959).
8. J. Fajans and L. Friedland, Am. J. Phys. **69**, 1096 (2001).
9. B. Meerson and S. Yariv, Phys. Rev. A **44**, 3570 (1991).
10. I. Aranson, B. Meerson, and T. Tatjima, Phys. Rev. A **45**, 7500 (1992).
11. L. Friedland and A. G. Shagalov, Phys. Rev. Lett. **81**, 4357 (1998).
12. Е. М. Маслов, Л. А. Калякин, А. Г. Шагалов, Теорет. матем. физика, **152**, 356 (2007).
13. A. Hasegawa and K. Mima, Phys. Rev. Lett. **39**, 205 (1977).
14. C. Schröder, T. Klinger, D. Block et al., Phys. Rev. Lett. **86**, 5711 (2001).
15. A. C. de Verdiere, J. Fluid Mech. **96**, 39 (1979).
16. J. J. Rasmussen, O. E. Garcia, V. Naulin et al., Phys. Scr. T **122**, 44 (2006).