

Неравновесные флуктуации тонкой металлической диффузной пленки под действием микроволнового излучения

И. А. Девятов¹⁾, П. А. Крутицкий⁺, А. В. Семенов*, Д. В. Гончаров

Научно-исследовательский институт ядерной физики, МГУ им. М.В. Ломоносова, 119899 Москва, Россия

⁺ Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, 125047 Москва, Россия

*Московский педагогический государственный университет, 119992 Москва, Россия

Поступила в редакцию 24 июня 2008 г.

Рассчитаны в нелинейном приближении неравновесные функции распределения электронов по энергиям в тонкой металлической диффузной пленке, возникающие при действии на нее микроволнового излучения, для различных моделей релаксации энергии. Рассчитана спектральная плотность возникающих при этом неравновесных флуктуаций и найдена ее зависимость от мощности микроволнового излучения для различных соотношений между скоростями электрон-фононной и электрон-электронной релаксаций.

PACS: 85.35.-р

Известно [1], что возбуждение электронов тонкой диффузной металлической пленки, находящейся при низкой температуре, постоянным электрическим полем приводит к распределению электронов по энергиям, отличающемуся от распределения Ферми. Тем ни менее, в этом случае удается ввести эффективную шумовую температуру T^* [1], определяющую спектральную плотность низкочастотных флуктуаций тока по формуле, аналогичной соотношению Найквиста, соответствующему термодинамическому равновесию: $S_I \propto T^*/\pi R$, где R – сопротивление диффузной пленки, определяемое в первую очередь упругим рассеянием на примесях. При этом эффективная шумовая температура T^* связана с напряженностью E приложенного к пленке постоянного электрического поля дробно-степенной зависимостью $T^* \propto E^{2/5}$, что ведет к дробно-степенной связи между поглощаемой мощностью P постоянного электрического поля и спектральной плотностью низкочастотных флуктуаций:

$$S_I \propto P^\beta, \quad (1)$$

где $\beta = 1/5$.

Интересно отметить, что дробно-степенная связь спектральной плотности флуктуаций S_I с поглощаемой мощностью P постоянного электрического поля, описываемая формулой (1) с $\beta = 1/5$, получается и в рамках двухтемпературной модели [2, 3], в которой возбуждение электронной подсистемы моделируется введением ее эффективной температуры, отличной от температуры фононной подсистемы, но

функция распределения электронов считается равновесной, фермиевской. Соотношение (1) было экспериментально подтверждено в работе [2].

В то же время, облучение металлической пленки микроволновым излучением ведет к существенно неравновесным функциям распределения электронов по энергиям, которые невозможно параметризовать введением эффективной температуры T^* распределения Ферми [4–6]. Существующие расчеты неравновесных функций распределения или модельные [4], или ограничены линейным по мощности приближением [5, 6]. В данной работе будут корректно рассчитаны неравновесные функции распределения в нелинейном приближении при облучении тонкой диффузной металлической пленки, находящейся при низкой температуре $T \ll \omega_0$, высокочастотным электромагнитным полем с частотой ω_0 . Исходя из полученных функций распределения, будет рассчитана спектральная плотность флуктуаций S_I и показано, что дробно-степенная связь спектральной плотности флуктуаций S_I с мощностью P высокочастотного поля, описываемая формулой вида (1), сохраняется. При этом показатель степени β в формуле (1) будет зависеть от соотношения между скоростями электрон-фононной τ_{e-ph}^{-1} и электрон-электронной τ_{e-e}^{-1} релаксаций. Данные расчеты важны для корректного дизайна схем RSFQ сопряжения проектируемых квантовых компьютеров [7] и расчета предельной чувствительности современных детекторов терагерцового диапазона [8].

Известно [9], что проблема расчета флуктуаций в диффузном металлическом резисторе сводится к задаче о расчете функции распределения электронов по

¹⁾e-mail: igor-devyatov@yandex.ru

энергиям $f(\varepsilon)$. Будем считать, что геометрические размеры изучаемого нами резистора малы по сравнению с длиной волны микроволнового излучения и характерными длинами энергетической релаксации. В этом случае можно пренебречь координатной зависимостью функции распределения, и выражение для спектральной плотности низкочастотных флуктуаций [9] принимает вид

$$S_I = \frac{1}{\pi R} \int_{-\infty}^{\infty} d\varepsilon f(\varepsilon)(1 - f(\varepsilon)). \quad (2)$$

Уравнение для функции распределения электронов по энергиям в тонкой диффузной пленке, облучаемой электромагнитным излучением, удобно получить, воспользовавшись хорошо развитым аппаратом теории неравновесной сверхпроводимости [10]. Исходя из уравнения Келдыша – Усаделя работы [10]

для матричной функции Грина $\overset{\vee}{G} = \begin{pmatrix} G^R & G^K \\ 0 & G^A \end{pmatrix}$

(в случае сверхпроводника запаздывающая G^R , опережающая G^A , келдышева G^K являются также 2×2 матрицами в пространстве Намбу, учитывающем сверхпроводящие корреляции) и учитывая отсутствие сверхпроводимости в изучаемой металлической пленке (параметр порядка $\Delta = 0$, матрица $\hat{\tau}_z$, действующая в пространстве Намбу, равна единичной матрице), рассматривая пространственно-однородный случай, можно получить следующее стационарное кинетическое уравнение:

$$I_{e-pt} + I_{e-ph} + I_{e-e} = 0. \quad (3)$$

Первое слагаемое, I_{e-pt} , в левой части (3) описывает однофотонный процесс поглощения, при котором закон сохранения импульса в процессе поглощения фотона электроном [11] обеспечивается упругим рассеянием электронов на примеси. При выполнении условия квантовости поглощения [12] $\tau_{el}^{-1} \gg \omega_0 \gg \tau_{in}^{-1}$, где τ_{el}^{-1} – скорость упругой релаксации на примесях, $\tau_{in}^{-1} = \tau_{e-e}^{-1} + \tau_{e-ph}^{-1}$ – скорость релаксации энергии, слагаемое I_{e-pt} имеет вид

$$I_{e-pt} = \tau_{e-pt}^{-1} (f(\varepsilon + \omega_0) + f(\varepsilon - \omega_0) - 2f(\varepsilon)). \quad (4)$$

При этом скорость поглощения фотонов равна $\tau_{e-pt}^{-1} = e^2 D A_0^2 = 2P/VN(0)\omega_0^2$, где A_0 – вектор-потенциал высокочастотного электромагнитного сигнала $A(t) = A_0 \cos(\omega_0 t)$, D – коэффициент диффузии пленки, V – объем резистора, $N(0)$ – плотность состояний (на спин), e – заряд электрона. При выводе (4) нами сначала была выделена из уравнения (41) работы

[10] келдышева компонента функции Грина, использован явный вид функций Грина нормального металла $G^{R(A)}(R, t, t') = \pm\delta(t - t')$ [13], использовано известное представление для функции распределения h [10, 13]:

$$G^K(t, t') = \int dt' [G^R(t, t_1)h(t_1, t') - h(t, t_1)G^A(t_1, t')],$$

совершено Фурье-преобразование по разностному времени $t - t'$:

$$h(T, \varepsilon) = \int d(t - t') \exp(i\varepsilon(t - t'))h(t, t'),$$

$$T = (t + t')/2,$$

и сделано естественное, в случае оптического возбуждения, предположение об электронно-дырочной симметрии $h(\varepsilon) = 1 - 2f(\varepsilon)$, то есть поперечная компонента функции распределения $f_t(\varepsilon) = 0$. Источник (4) совпадает с аналогичным выражением, полученным другим способом в [12], если пренебречь в [12] сверхпроводящими когерентными факторами.

Второе слагаемое, I_{e-ph} , в левой части (3) описывает неупругое рассеяние электронов на фонах и совпадает с аналогичными выражениями работ [10, 14]:

$$I_{e-ph} = \frac{\lambda}{\omega_D^2} \int_0^\infty d\omega \omega^2 \{[1 - f(\varepsilon)]f_+ - f(\varepsilon)[1 - f_-]\}. \quad (5)$$

где $f_\pm = f(\varepsilon \pm \omega)$, λ – безразмерная константа электрон-фононного взаимодействия, ω_D – частота Дебая. В формуле (5) приняты во внимание только спонтанные переходы, поскольку мы предполагаем температуру T пленки низкой и ее толщину d малой, то есть считаем, что число равновесных и неравновесных фононов пренебрежимо мало.

Третье слагаемое, I_{e-e} , в левой части (3) описывает неупругое рассеяние электронов друг на друге и совпадает с аналогичными выражениями работ [10, 14]:

$$I_{e-e} = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} d\varepsilon_1 \{f_- f(\varepsilon_1)[1 - f(\varepsilon)][1 - f_-^1] - f(\varepsilon)f_-^1[1 - f_-][1 - f(\varepsilon_1)]\}K(\omega), \quad (6)$$

где $f_-^1 = f(\varepsilon_1 - \omega)$, а ядро $K(\omega)$ зависит от рассматриваемой модели электрон-электронного взаимодействия. В “чистом” пределе ядро $K(\omega)$ имеет вид [14] $K(\omega) = K_{cl} = \pi^2 k_{sc}/64\varepsilon_F k_F$, где ε_F , k_F – энергия и

импульс Ферми, соответственно, k_{sc} – длина экранирования.

Ограничимся сначала одним электрон-фононным каналом релаксации в (3). В этом случае для неравновесной части $\varphi(\varepsilon)$ функции распределения $f(\varepsilon) = f_F(\varepsilon) + \varphi(\varepsilon)$ (для рассматриваемых низких температур мы считали $f_F(\varepsilon) = \Theta(-\varepsilon)$, $\Theta(x)$ – ступенчатая функция Хэвисайда) мы получили следующее нелинейное интегральное уравнение:

$$\begin{aligned} \varphi(x) \left\{ \frac{x^3}{3} + 2 \int_x^\infty dz \varphi(z)(z^2 + x^2) + 4x \int_0^x dz \varphi(z)z \right\} = \\ = \gamma \{ \Theta(1-x) + [\varphi(x+1) + \varphi(x-1) - 2\varphi(x)] \} + \\ + \int_x^\infty dz \varphi(z)(z-x)^2, \end{aligned} \quad (7)$$

где $x = \varepsilon/\omega_0$, а безразмерная γ пропорциональна мощности сигнала: $\gamma = 2P\omega_D^2/VN(0)\omega_0^5$.

Уравнение (7) отличается от рассмотренных в [5, 6] квантовых кинетических уравнений тем, что оно не линеаризовано, то есть искомая поправка $\varphi(x)$ к полной функции распределения электронов по энергиям не предполагается малой по сравнению с единицей. При этом входящие в фигурные скобки в первой строке (7) интегралы описывают согласованное с мощностью принимаемого сигнала время релаксации (эффект, не учитываемый в линейном приближении), а слагаемое во второй строке (7) $[\varphi(x+1) + \varphi(x-1) - 2\varphi(x)]$ учитывает эффект “последовательного поглощения фотонов”.

Для численного решения нелинейного интегрального уравнения (7) нами была разработана специальная итерационная процедура, позволяющая с высокой точностью найти его решение, сведя к последовательному решению линейных интегральных уравнений Вольтерра 2-го рода. Для этого в качестве первого приближения на интервале $[0, 1]$ известным методом [15] (на двух сетках, считая от правого края интервала) решалось линейное интегральное уравнение Вольтерра 2-го рода, получающееся из (7) отбрасыванием нелинейных частей в первой строке (интегралов в фигурных скобках) и слагаемого во второй строке (7) $[\varphi(x+1) + \varphi(x-1) - 2\varphi(x)]$, ответственного за последовательное поглощение фотонов. На следующей итерации опять решалось линейное интегральное уравнение Вольтерра 2-го рода, но на интервале $[0, 2]$ и с интегралами в фигурных скобках первой строки и слагаемым $[\varphi(x+1) + \varphi(x-1) - 2\varphi(x)]$ во второй строке (7), рассчитанных на основании первой итерации. Далее итерационный процесс повторялся, последовательно увеличивая рассматриваемый интервал x

решения уравнения (7). При этом хватало небольшого (5–8) числа итераций, чтобы независимо рассчитываемая неувязка численного решения была на много порядков меньше самой величины решения. Естественно, такая итерационная процедура оказывается устойчивой при малых (менее 0.1) значениях параметра γ , пропорционального мощности сигнала. Проведенные нами оценки показали, что $\gamma < 0.001$ в экспериментах [7, 8].

На рис.1 представлены результаты численного решения уравнения (7), проведенного для различных

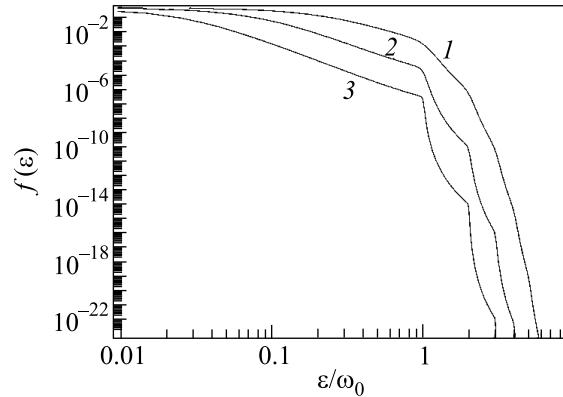


Рис.1. Функции распределения электронов по энергии в металлической пленке, облучаемой микроволновым излучением, рассчитанные с учетом только электрон-фононного канала релаксации, для различных значений нормированной мощности γ . Кривая 1 соответствует $\gamma = 10^{-3}$, кривая 2 соответствует $\gamma = 10^{-5}$, кривая 3 соответствует $\gamma = 10^{-7}$

значений нормированной мощности сигнала γ по описанной выше итерационной процедуре. Кривая 1 на рисунке соответствует значению $\gamma = 10^{-3}$, кривая 2 соответствует $\gamma = 10^{-5}$, кривая 3 соответствует $\gamma = 10^{-7}$. Видно, что с уменьшением мощности сигнала величина неравновесной функции распределения также уменьшается, выходя тем не менее на значение, равное 0.5 при $\varepsilon = 0$ [4]. Данный результат также непосредственно следует из аналитического из (7), (3). На кривых на рис.1, построенном в двойном логарифмическом масштабе, присутствует линейный участок при $x \lesssim 1$, соответствующий обратно-степенной зависимости $\varphi(\varepsilon) \propto \varepsilon^{-4}$. Данная зависимость в линейном по мощности режиме была предсказана ранее в [4–6]. Также видно, что с увеличением мощности сигнала (от кривой 3 к кривой 1) функция распределения при малых значениях энергии быстрее выходит на насыщение, что отражает согласованный с мощностью сигнала учет времени релаксации в нелинейном интегральном уравнении

(7). “Ступеньки” функции распределения на рис.1 при $x \geq 1$ соответствуют последовательному поглощению фотонов.

Последовательный учет электрон-электронного взаимодействия в кинетическом уравнении (3) ведет к существенному усложнению процедуры его решения даже в “чистом” пределе с не зависящим от передаваемой энергии ядром $K(\omega) = K_{cl}$ электрон-электронного интеграла столкновений (6) из-за двойных интегралов от функций со смещенным аргументом в (6). Поэтому учет электрон-электронного взаимодействия мы произвели путем применения метода “вытягивания по параметру” [15], стартуя с полученного с высокой точностью решения $\varphi(x)$ уравнения (7), учитывающего только электрон-фононный канал релаксации. Решение $\varphi(x)$ естественно рассматривать как нулевое приближение полного кинетического уравнения (3), если нормированная скорость электрон-электронного взаимодействия мала: $\alpha = \tau_{e-e}^{-1}(\omega_0)/\tau_{e-ph}^{-1}(\omega_0) \ll 1$ (в “чистом” случае $\alpha = \pi^2 \omega_D^2 k_{sc}/64 \lambda k_F \varepsilon_F \omega_0$). Тогда, варьируя φ в (7):

$$\varphi(x) \rightarrow \varphi(x) + \tilde{\varphi}(x), \quad \tilde{\varphi}(x) = \sum_{i=1}^M \tilde{\varphi}_i(x), \quad (8)$$

где M – число итераций, которые позволяют довести нормированную скорость электрон-электронного взаимодействия даже до значения, много большего 1, $\alpha_\Sigma = M\alpha \gg 1$, для поправки $\tilde{\varphi}_i(x)$ имеем, с учетом (3), следующее рекуррентное соотношение:

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}_i(x) = & \left\{ I_{e-e}[\bar{f}(x)] + \int_x^N dz \tilde{\varphi}_i(z)(z-x)^2 + \right. \\ & + \gamma(1-\delta_{1,i}) [\tilde{\varphi}_{i-1}(x+1) + \tilde{\varphi}_{i-1}(x-1) - 2\tilde{\varphi}_{i-1}(x)] - \\ & - 2\bar{\varphi}(x) \left[\int_x^N dz \tilde{\varphi}_i(z)(z^2+x^2) + \right. \\ & \left. \left. + (1-\delta_{1,i}) 2x \int_0^x dz \tilde{\varphi}_{i-1}(z)z \right] \right\} / \\ & / \left\{ \frac{x^3}{3} + 2 \int_x^N dz \tilde{\varphi}(z)(z^2+x^2) + 4x \int_0^x dz \bar{\varphi}(z)z \right\}. \quad (9) \end{aligned}$$

В формуле (9) N – верхняя граница по x рассчитанного нулевого приближения $\varphi(x)$, а $I_{e-e}[\bar{f}(x)]$ обозначает функционал электрон-электронного взаимодействия (6), взятый на функциях $\bar{f}(x)$, где

$$\bar{f}(x) = \Theta(-x) + \bar{\varphi}(x), \quad \bar{\varphi}(x) = \varphi(x) + \sum_{i=1}^{M-1} \tilde{\varphi}_i(x).$$

Интегральное уравнение (9) решается численно подобно (7), причем на каждой итерации $\alpha \ll 1$.

На рис.2 представлены результаты численного расчета в “чистом” пределе неравновесных функций

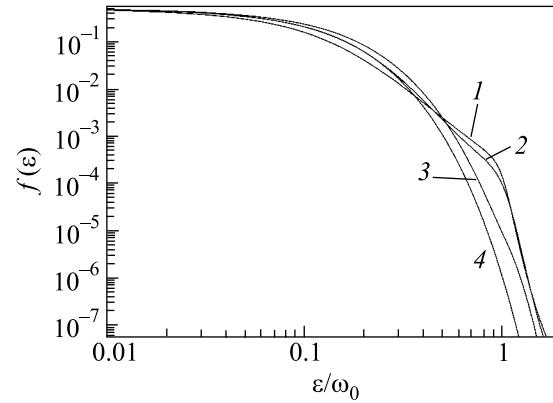


Рис.2. Функции распределения электронов по энергии, рассчитанные с учетом как электрон-фононного, так и электрон-электронного каналов релаксации для различных значений нормированной скорости электрон-электронной релаксации α_Σ . Кривая 1 соответствует $\alpha_\Sigma = 0$, кривая 2 – $\alpha_\Sigma = 0.3$, кривая 3 – $\alpha_\Sigma = 3$, кривая 4 – распределению Ферми. Мощность микроволнового излучения одинакова для всех кривых: $\gamma = 10^{-4}$

распределения с помощью итерационной процедуры (8), (9) для различных отношений скоростей электрон-электронной и электрон-фононной релаксаций α_Σ . Мощность микроволнового излучения для всех кривых на рис.2 одинакова: $\gamma = 10^{-4}$. Кривая 1 на рис.2 соответствует $\alpha_\Sigma = 0$, кривая 2 соответствует $\alpha_\Sigma = 0.3$, кривая 3 соответствует $\alpha_\Sigma = 3$. Дальнейшее увеличение α_Σ не меняло существенным образом вид кривой 3 на рис.2, поэтому мы ограничились “вытягиванием” по параметру до значения $\alpha_\Sigma = 3$. Из вида кривых 1-3 на рис.2 следует, что учет электрон-электронного взаимодействия приводит к сглаживанию особенностей при энергиях, кратных кванту поглощаемого микроволнового излучения ω_0 , возникающих из-за последовательного поглощения фотонов (см. также рис.1). Также учет электрон-электронного взаимодействия приводит к росту функции распределения при малых значениях энергии $\varepsilon \ll \omega_0$ по сравнению с функцией распределения, рассчитанной только для электрон-фононного канала релаксации, и ее уменьшению при больших значениях энергии. При этом вид функции распределения даже при $\alpha_\Sigma \gg 1$ существенно отличается от фермиевской (кривая 4 на рис.2), рассчитанной в рамках двухтемпературной модели [2, 3] для той же нормированной мощности $\gamma = 10^{-4}$.

Подстановка рассчитанных функций распределения $f(\varepsilon)$ в выражение (2) для спектральной плотности флуктуаций позволяет найти ее зависимость от мощности микроволнового излучения. На рис.3 представлены в двойном логарифмическом масштабе

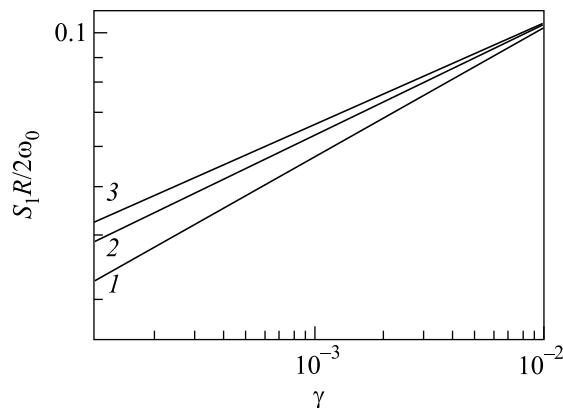


Рис.3. Спектральная плотность флюктуаций S_I , нормированная на $2\omega_0/R$, как функция нормированной мощности сигнала γ , рассчитанная для различных значений нормированной скорости электрон-электронной релаксации α_Σ . Кривая 1 соответствует $\alpha_\Sigma = 0$, кривая 2 – $\alpha_\Sigma = 0.3$, кривая 3 – $\alpha_\Sigma = 3$

эти зависимости, рассчитанные для различных значений нормированной скорости электрон-электронной релаксации α_Σ . Кривые 1–3 на рис.3 соответствуют тем же значениям α_Σ , что и соответствующие функции распределения на рис.2. Из вида кривых 1–3 на рис.3 следует, что зависимости спектральной плотности флюктуаций S_I диффузного металлического резистора от мощности приложенного микроволнового излучения γ хорошо аппроксимируются дробно-степенными зависимостями вида (1), с различными степенями β , меняющимися от $\beta = 1/4$ (кривая 1) в случае только электрон-фононного канала релаксации к $\beta = 1/5$ (кривая 3) с преимущественно электрон-электронной релаксацией. Рассчитанный нами численный коэффициент при $\gamma^{1/5}$ с точностью до нескольких процентов совпал с аналогичным коэффициентом в случае возбуждения электронной подсистемы диффузного металлического резистора постоянным током [1]. Полученное нами увеличение амплитуды спектральной плотности флюктуаций с увеличением электрон-электронного взаимодействия качественно совпадает с аналогичным влиянием электрон-электронного взаимодействия в рассмотренных в работе [14] неравновесных дробовых флюктуациях диффузного металлического резистора.

При сверхнизких температурах, $T < 1\text{K}$, в медных и золотых пленках с примесями железа экспе-

риментально обнаружена [16] аномальная обратно-квадратичная энергетическая зависимость ядра $K(\omega) \propto \omega^{-2}$, входящего в электрон-электронный интеграл столкновений (6). Также при низких температурах возможна интерференция электрон-электронного рассеяния и рассеяния на примесях, ведущая к квантовым поправкам к проводимости и к энергетической зависимости ядра электрон-электронного взаимодействия (6) вида $K(\omega) \propto \omega^{-3/2}$ [17]. В этих случаях учет влияния электрон-электронного рассеяния на вид функции распределения также можно производить путем применения итерационной схемы “вытягивания” по параметру, описываемой соотношениями (8), (9). При этом в итерационном процессе не возникает расходимостей, поскольку фигурная скобка в подынтегральном выражении в электрон-электронном интеграле столкновений (6) понижает степень расходимости подынтегрального выражения при $\omega = 0$, интегралы от которого в итерационном процессе (8), (9) можно рассматривать в смысле главного значения. Нами были рассчитаны неравновесные функции распределения с учетом как электрон-фононного, так и электрон-электронного рассеяния с “аномальными” ядрами $K(\omega) \propto \omega^{-2}, \omega^{-3/2}$ и соответствующие спектральные плотности флюктуаций. Результаты расчетов оказались качественно схожими с представленными на рис.2, 3 зависимостями, полученными в “чистом” пределе.

Проведенный анализ показал, что при облучении диффузного металлического резистора микроволновым излучением спектральная плотность флюктуаций S_I связана с мощностью микроволнового излучения P дробно-степенной зависимостью вида (1), с показателем степени $\beta = 1/5$ при преимущественно электрон-электронном канале релаксации энергии. К такой же зависимости приводят как неравновесная модель [1] возбуждения электронной подсистемы металлического резистора постоянным током, так и двухтемпературная модель [2, 3], в которой возбуждение электронной подсистемы моделируется введением ее эффективной температуры T_e , отличной от температуры фононной подсистемы T_{ph} , но функция распределения электронов считается равновесной, фермиевской. Поэтому можно говорить о “слабой” неравновесности функции распределения возбужденных электронов при воздействии на металлический резистор постоянного тока или при микроволновом облучении в случае сильного электрон-электронного взаимодействия: несмотря на то, что функции распределения существенно не фермиевские, для спектральной плотности возникающих флюктуаций можно ввести эффективную температу-

ру в духе двухтемпературной модели [3]. В то же время при высокочастотном возбуждении в отсутствие электрон-электронного взаимодействия, дробно-степенная связь спектральной плотности флюктуаций S_I с поглощаемой мощностью имеет другой показатель степени, $\beta = 1/4$, что не позволяет ввести эффективную температуру флюктуаций [1]. Поэтому в этом случае неравновесность электронной подсистемы можно считать более сильной. Необходимо отметить возможные трудности при экспериментальном подтверждении зависимости (1) с показателем степени $\beta = 1/4$, возникающей при микроволновом облучении в отсутствие электрон-электронного взаимодействия, поскольку к такой же зависимости ведет и равновесный нагрев металла с установлением теплового баланса из-за акустического рассогласования на границе пленка – подложка (сопротивления Капицы) [18, 2].

Авторы благодарны М.Ю. Куприянову и А.Ю. Кидяровой-Шевченко (Херр) за полезное обсуждение проблемы.

Работа выполнена при поддержке министерства науки и образования России, в рамках государственного контракта № 02.513.11.3157 и шведского проекта STINT “Gigahertz electronics”.

1. M. R. Arai, Appl. Phys. Lett. **42**, 906 (1983).

2. F. C. Wellstood, C. Urbina, and J. Clarke, Phys. Rev. B **49**, 5942, (1994).
3. М. И. Каганов, И. М. Лифшиц, Л. В. Танатаров, ЖЭТФ **31**, 232 (1956).
4. В. Ф. Елесин, Ю. В. Копаев, УФН **133**, 259 (1981).
5. И. А. Девятов, М. Ю. Куприянов, Письма в ЖЭТФ **80**, 752 (2004).
6. И. А. Девятов, П. А. Крутицкий, М. Ю. Куприянов, Письма в ЖЭТФ **84**, 61 (2006).
7. A. Fedorov, A. Shirman, G. Schön et al., Phys. Rev. B **75**, 224504, (2007).
8. М. В. Лятти, Д. А. Ткачев, Ю. У. Дивин, Письма в ЖТФ **32**, 79 (2006).
9. K. E. Nagaev, Phys. Lett. A **69**, 103 (1992).
10. А. И. Ларкин, Ю. Н. Овчинников, ЖЭТФ **73**, 299 (1977).
11. N. Ashcroft and N. Mermin, *Solid State Physics*, Saunders College Publishing, 1976.
12. Г. М. Элиашберг, ЖЭТФ **61**, 1254 (1971).
13. J. Rammer and H. Smith, Rev. Mod. Phys. **58**, 323 (1986).
14. K. E. Nagaev, Phys. Rev. B **52**, 4740 (1995).
15. Н. С. Бахвалов, *Численные методы*, М.: Наука, 1973.
16. H. Pothier, S. Gueron, N. O. Birge et al., Phys. Rev. Lett. **79**, 3490 (1997).
17. B. L. Altshuler, A. G. Aronov, and D. E. Khmelnitsky, J. Phys. C: Solid State Phys. **15**, 7367 (1982).
18. W. A. Little, Can. J. Phys. **37**, 334 (1959).