

Стационарные прецессионные топологические солитоны с ненулевым инвариантом Хопфа в одноосном ферромагнетике

А. Б. Борисов, Ф. Н. Рыбаков¹⁾

Институт физики металлов Уральского отд. РАН, 620219 Екатеринбург, Россия

Поступила в редакцию 30 июня 2008 г.

После переработки 7 июля 2008 г.

Найдены трехмерные стационарные прецессионные солитоны с ненулевым индексом Хопфа путем численного решения уравнения Ландау–Лифшица. Определена их структура и области существования.

PACS: 03.50.–k, 11.27.+d, 47.32.Cc, 75.10.Hk, 75.60.Ch, 94.05.Fg

Топологические трехмерные солитоны представляют большой интерес в различных областях физики, включая гидродинамику, физику элементарных частиц, космологию и физику конденсированных сред. В моделях с трехкомпонентным векторным полем $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3)$ единичной длины ($n^2 = 1$) локализованные структуры существуют при условии, что в асимптотике $|\mathbf{r}| \rightarrow \infty$ поле \mathbf{n} стремится к постоянному вектору \mathbf{n}_0 . Такие поля отображают пространство $R^3 \cup \{\infty\}$ в двумерную сферу S^2 , классифицируются гомотопическими классами $\pi_3(S^2) = Z$ и характеризуются инвариантом Хопфа H [1]:

$$H = -\frac{1}{(8\pi)^2} \int \mathbf{F} \cdot \mathbf{A} d\mathbf{r}, \quad (1)$$

где $F_i = \epsilon_{ijk} \mathbf{n} \cdot (\nabla_j \mathbf{n} \times \nabla_k \mathbf{n})$ и $\text{rot} \mathbf{A} = 2\mathbf{F}$. Инвариант H имеет простую геометрическую интерпретацию; он является коэффициентом зацепления замкнутых кривых – прообразов двух произвольных точек на сфере S^2 .

В теории поля стабильные трехмерные солитоны с $H \neq 0$ (knotted solitons) были численно исследованы в модели Фаддеева–Ниemi [2–6] (нелинейная σ -модель, включающая члены с производными четвертого порядка). В физике конденсированных сред топологические дефекты с ненулевым инвариантом Хопфа обсуждались в пионерских работах Воловика и Минеева для сверхтекучего ${}^3\text{He}$ [7], Дзялошинского и Иванова [8] для одноосного ферромагнетика. Для последних сред простые аргументы, основанные на теореме Деррика [9], показывают отсутствие нетривиальных статических трехмерных солитонов с конечной энергией, но такие структуры могут существовать в динамическом случае, стабилизированные прецессией намагниченности [10, 11]. Изучение трехмерных

магнитных структур представляет как академический, так и технический интерес в связи с работами по созданию новых устройств памяти на топологических солитонах в одноосных ферромагнетиках [12].

До недавнего времени трехмерные магнитные структуры были мало изучены. В последние годы появился ряд оригинальных работ по теоретическому и экспериментальному изучению магнитных структур в сверхтекучем ${}^3\text{He}$ [13–16]. В модели Гейзенберга изотропного ферромагнетика аналитически описаны спиральные и кноидальные ежи [17] с $H = 0$, найдены в результате численного счета движущиеся с постоянной скоростью прецессионные солитоны с $H = 1$ [18]. В одноосном ферромагнетике исследованы прецессионные радиально-симметричные нетопологические солитоны как стационарные (магнитные капли) [19], так и движущиеся с постоянной скоростью [20]. Кроме того, в недавней работе [21] рассматривался также и случай движущегося топологического солитона, однако стабильные конфигурации с $H \neq 0$ не были найдены.

В этой работе мы находим динамические структуры в одноосном ферромагнетике – стационарные прецессионные трехмерные солитоны с ненулевым индексом Хопфа. Определяем области их существования, исследуем тонкую структуру и основные свойства.

Динамика вектора намагниченности описывается уравнением Ландау–Лифшица, которое в пренебрежении релаксацией, может быть записано в виде

$$\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t} = -\frac{2\mu_0}{\hbar} \left[\frac{\delta E}{\delta \mathbf{M}} \times \mathbf{M} \right], \quad (2)$$

где энергия $E = E_{\text{exch}} + E_{\text{aniz}}$ ферромагнетика включает в себя обменную энергию E_{exch} , энергию магнитной анизотropии E_{aniz} с параметром β :

¹⁾e-mail: F.N.Rybakov@gmail.com

$$E_{\text{exch}} = \frac{\alpha}{2} \int \left(\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial r_i} \right)^2 dr, \quad (3)$$

$$E_{\text{aniz}} = \frac{\beta}{2} \int (M_x^2 + M_y^2) dr. \quad (4)$$

В предположении больших значений параметров β , что характерно для многих магнитных сред, можно пренебречь энергией магнито-дипольного взаимодействия.

В параметризации

$$\mathbf{M} = M_0 \mathbf{n}, \quad (5)$$

$$\mathbf{n} = (\sin \Theta \cos \Phi, \sin \Theta \sin \Phi, \cos \Theta),$$

мы ищем решения для стационарного прецессионного солитона в виде

$$\begin{aligned} \Phi &= \omega t + Q\varphi + \phi(r, z), \\ \Theta &= \theta(r, z), \end{aligned} \quad (6)$$

где φ – полярный угол цилиндрической системы координат (r, φ, z) , ϕ – нечетная, а θ – четная функции z , и ось z выбрана вдоль оси симметрии. Известно [22, 11], что исследование динамики таких структур эквивалентно решению вариационной задачи: минимизации функционала энергии E при фиксированном значении инварианта движения N – полного числа спиновых отклонений:

$$N = \frac{M_0}{2\mu_0} \int (1 - n_z) dr = \text{const}. \quad (7)$$

Частота прецессии определяется из соотношения

$$\omega = \frac{1}{\hbar} \frac{\partial E}{\partial N}. \quad (8)$$

Действуя методом Деррика [9], для конфигураций поля с конечной энергией, получим удобную формулу для расчета частоты прецессии:

$$\omega = \frac{1}{\hbar} \frac{E_{\text{exch}} + 3E_{\text{aniz}}}{3N} \quad (9)$$

С учетом (6) функционал энергии принимает вид

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} w_E dr dz, \quad (10)$$

где

$$\begin{aligned} w_E &= \alpha \pi M_0^2 \left[r \left(\frac{\partial \mathbf{n}^*}{\partial r} \right)^2 + r \left(\frac{\partial \mathbf{n}^*}{\partial z} \right)^2 + \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{Q^2}{r} + \frac{\beta}{\alpha} r \right) (n_x^{*2} + n_y^{*2}) \right], \end{aligned} \quad (11)$$

вектор

$$\mathbf{n}^* = (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta). \quad (12)$$

Выражение для индекса Хопфа H для полей (6) существенно упрощается [23, 6]:

$$H = QT, \quad (13)$$

где T – целое число:

$$T = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \mathbf{n}^* \cdot \left[\frac{\partial \mathbf{n}^*}{\partial r} \times \frac{\partial \mathbf{n}^*}{\partial z} \right] dr dz. \quad (14)$$

Для численного решения вариационной задачи методом конечных разностей от функционала энергии можно перейти к функции, аргументами которой являются проекции вектора \mathbf{n}^* в узлах дискретной сетки. Областью дискретизации был выбран единичный квадрат $0 \leq r \leq 1, 0 \leq z \leq 1$, с учетом того, что в области отрицательных z конфигурация поля определена соотношениями симметрии.

Ожидается, что область локализации солитона порядка характерной длины l_0 :

$$l_0 = \sqrt{\alpha/\beta}. \quad (15)$$

Параметры α и β выбирались таковыми, что $1/l_0 \sim \sqrt{D}$, где D – количество узлов дискретной сетки в одном из направлений. Суть такого подхода в том, чтобы солитон целиком поместился в область моделирования и в то же время размер его должен быть достаточно большим, чтобы дискретная сетка точно отражала его гладкую форму. Кроме того, для повышения эффективности, дискретная сетка накладывалась не равномерно, а с повышением плотности точек к центру системы координат. Это предполагает, что неоднородность локализована вблизи центра, и поле быстро переходит в однородное состояние на бесконечности. На границах области $z = 1$ или $r = 1$ вектор необходимо зафиксировать соответственно основному состоянию $\mathbf{n}_0 = (0, 0, 1)$.

Минимизация энергии с аддитивной штрафной функцией проводилась методом сопряженных градиентов. Квадратичная штрафная функция накладывает связь на норму вектора \mathbf{n}^* , который в каждой точке имеет единичную длину. Интеграл (7) после дискретизации переходит в линейную форму, и накладываемая связь учитывается действием линейного оператора [24] при вычислении направления минимума целевой функции на каждой итерации.

Отличительной особенностью настоящих численных исследований был выбор начального состояния – пробной конфигурации поля, от которой начинается

поиск минимума. На всей области моделирования, кроме небольшого квадранта вблизи центра координат, вектор соответствовал основному состоянию, а внутри квадранта векторы лежали в перпендикулярной плоскости со случайной ориентацией от точки к точке. Тем самым, начальная конфигурация в определенной мере хаотична и даже не отвечает критериям дискретизации какой бы то ни было гладкой функции.

Для контроля правильности результата, помимо наблюдаемого приближения энергии к асимптоте после большого числа итераций, проводилась прямая проверка результата. По формуле (9) рассчитывалась частота ω , численно рассчитывались вторые пространственные производные и непосредственно невязка уравнения Ландау–Лифшица (2) в каждой внутренней точке области моделирования.

Для приведенных далее солитонов результатом численных вычислений по формуле (14) было $T = 1$. В таком случае индекс Хопфа, согласно (13), $H = Q$. Другие типы топологических солитонов будут описаны в другом месте. Обсудим полученные результаты.

Типичная конфигурация поля \mathbf{n} проиллюстрирована на рис.1 при $H = 3$, где для наглядности ко-

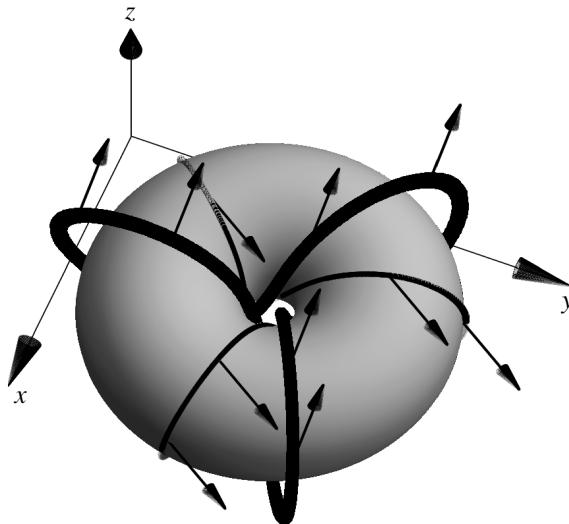


Рис.1. Распределение намагниченности в трехмерном топологическом солитоне с $H = 3$; тонкая линия – прообраз точки $(\Theta_1, \Phi_1) = (0.5\pi, 1)$ на сфере S^2 ; толстая линия – прообраз точки $(\Theta_2, \Phi_2) = (0.2\pi, 3)$

ординатные оси смещены и указывают лишь на ориентацию солитона в пространстве. Видно, что коэффициент зацепления прообразов двух точек на сфере S^2 равен трем. Торообразной поверхности соответ-

ствует значение $\theta = \pi/2$. На оси симметрии ($r = 0$) вектор $\mathbf{n} = \mathbf{n}_0$ и при $r^2 + z^2 \rightarrow \infty$ вектор $\mathbf{n} \rightarrow \mathbf{n}_0$.

На рис.2 построены линии постоянного значения углов, параметризующих вектор \mathbf{n}^* . Кривая $\theta = \pi/2$

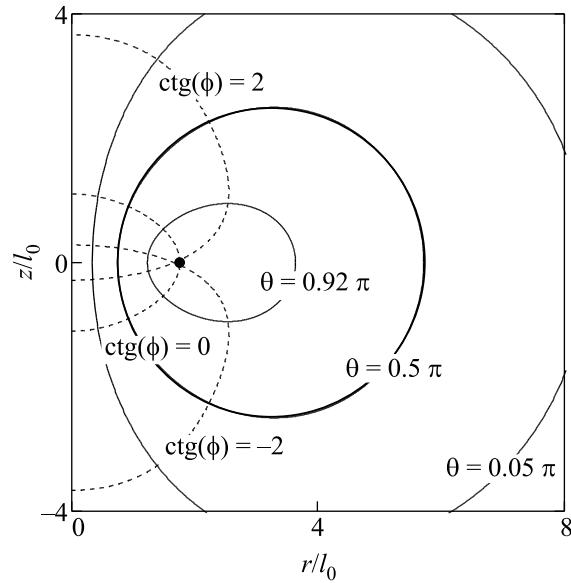


Рис.2. Линии постоянного значения углов, параметризующих единичный вектор \mathbf{n}^* при $H = 3$, $\omega/\omega_0 = 0.5$; сплошная линия – $\theta = \text{const}$; пунктирная линия – $\text{ctg}(\phi) = \text{const}$

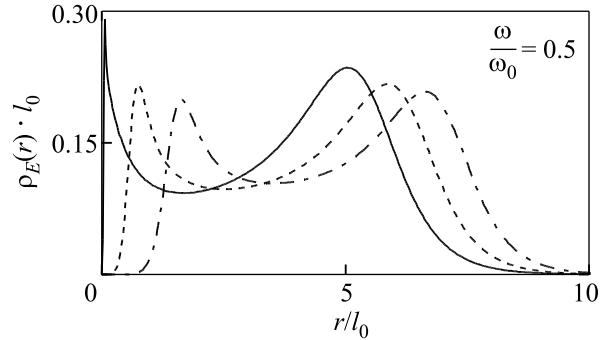


Рис.3. Зависимость нормированной плотности энергии от расстояния для солитонов с одинаковой частотой прецессии при различных числах H ; сплошная линия – $H = 2$; пунктирная линия – $H = 3$; штрихпунктирная линия – $H = 4$

является сечением аксиально-симметричной поверхности рода 1 (торообразной поверхности), внутри которой сконцентрирована большая часть энергии солитона. Точки пересечения линий $\phi = \text{const}$ соответствуют $\theta = \pi$ (южный полюс сферы S^2).

Оказалось, что рассчитать солитон наиболее трудно при меньших H . Для значений $H = 3$ и $H = 4$

была проведена целая серия результативных вычислений на дискретной сетке размером 600×400 точек. Для случая $H = 2$ приемлемый результат удалось получить лишь на сетке размером 1600×800 точек. Причины этого, как оказалось, связаны с одной интересной особенностью структуры исследуемого класса объектов, которая проявляется при численных вычислениях нормированной плотности энергии ρ_E :

$$\rho_E = \frac{1}{E} \int_{-\infty}^{\infty} w_E dz. \quad (16)$$

На рис.3 приведен график зависимости ρ_E от r для разных значений H . Максимальные значения ρ_E находятся в окрестности $\theta = \pi/2$. При уменьшении H область локализации, соответствующая первому максимуму $\rho_E(r)$, становится уже и максимум увеличивается. Структура солитона становится более тонкой и для дискретизации необходимо использовать сетку с большим количеством узлов.

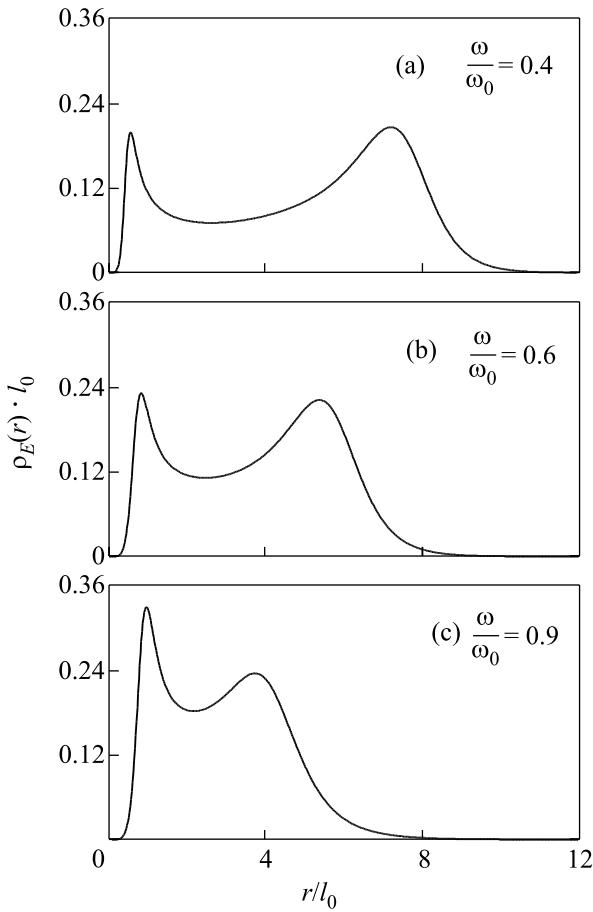


Рис.4. Зависимость нормированной плотности энергии солитона от расстояния для нескольких значений частоты прецессии при $H = 3$

Трехмерные солитоны с $H = 0$ существуют при значениях $\omega \leq 0.915\omega_0$ [19], где ω_0 – частота ФМР:

$$\omega_0 = \frac{2\mu_0 M_0 \beta}{\hbar}. \quad (17)$$

Увеличение частоты прецессии приводит к сжатию солитона (рис.4), что указывает на возможное существование некоторого критического предела отношения ω/ω_0 , подобно случаю нетопологического солитона [19].

На рис.5 изображена зависимость приведенной энергии $\varepsilon = E/a l_0$ от отношения ω/ω_0 . Как следует из рисунка, энергия солитона уменьшается с уве-

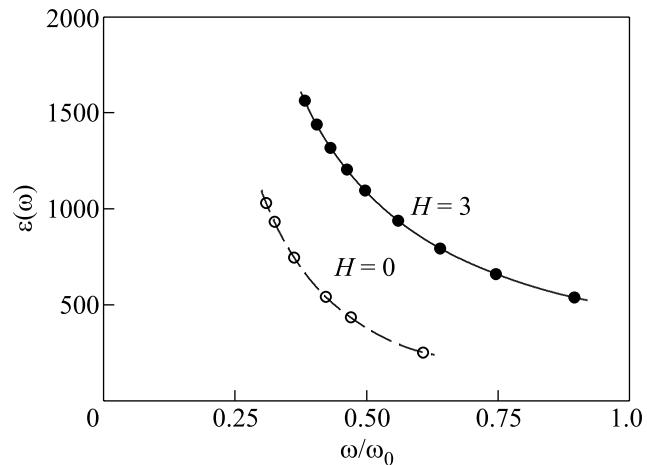


Рис.5. Зависимость энергии от частоты прецессии для нетопологического ($H = 0$) и топологического ($H = 3$) солитонов. Точками обозначены результаты численного счета

личением частоты прецессии. Для сравнения на рисунке приведена рассчитанная описанным выше методом подобная зависимость для магнитной капли.

Найденные локализованные структуры с характерными размерами от единиц до десятков l_0 существенно меньше характерных размеров ЦМД и могут найти применение в устройствах записи информации, если будут разработаны механизмы генерации и управления их свойствами, как это в настоящее время выполнено для магнитных вихрей [12]. Это дало бы потенциальную возможность записи информации в трехмерных образцах.

1. R. Bott and L. W. Tu, *Differential Forms in Algebraic Topology*, New York, 1982.
2. L. D. Faddeev, IAS Princeton, IAS-Report No.75-QS70, (1975).
3. L. D. Faddeev and A. J. Niemi, *Nature* **387**, 58 (1997).
4. L. D. Faddeev and A. J. Niemi, *hep-th/9705176* (1997).

5. R. A. Battye and P. M. Sutcliffe, Phys. Rev. Lett. **387**, 58 (1997).
6. J. Gladikowski and M. Hellmund, Phys. Rev. D **56**, 5194 (1997).
7. G. E. Volovik and V. P. Mineev, Sov. Phys. JETP **46**, 401 (1977).
8. I. E. Dzyoshinskii and B. A. Ivanov, Pisma v Zh. Eksp. Teor. Fiz. **29**, 592 (1979).
9. G. M. Derrick, J. Math. Phys. **5**, 1252 (1964).
10. A. M. Kosevich, B. A. Ivanov, and A. S. Kovalev, Phys. Rep. **194**, 117 (1990).
11. N. Papanicolaou and T. N. Tomaras, Nucl. Phys. B **360**, 425 (1991).
12. T. Okuno, K. Mibu, and T. Shinjo, J. Appl. Phys. **95**, 3612 (2004).
13. G. E. Volovik, cond-mat/0701180 (2007).
14. Yu. M. Bunkov and G. E. Volovik, Phys. Rev. Lett. **98**, 265302 (2007).
15. Yu. M. Bunkov and G. E. Volovik, J. Low Temp. Phys. **150**, 135 (2008).
16. Yu. M. Bunkov and G. E. Volovik, Physica C **468**, 609 (2008).
17. A. B. Borisov, JETP Letters **76**, 84 (2002).
18. N. R. Cooper, Phys. Rev. Lett. **82**, 1554 (1999).
19. B. A. Ivanov and A. M. Kosevich, Pisma v Zh. Eksp. Teor. Fiz. **24**, 495 (1976).
20. T. Ioannidou and P. M. Sutcliffe, Physica D **150**, 118 (2001).
21. P. Sutcliffe, Phys. Rev. B **76**, 184439 (2007).
22. J. Tjon and J. Wright, Phys. Rev. B **15**, 3470 (1977).
23. A. Kundu and Y. P. Rybakov, J. Phys. **15**, 269 (1982).
24. Б. Н. Пшеничный и Ю. М. Данилин, Численные методы в экстремальных задачах, М.: Наука, 1975.